

MATEMATIKA

Eksponeencijalne
i logaritamske
funkcije

Eksponencijalne i logaritamske funkcije

Knjiga „*Matematika za IT*”

- Poglavlje „Eksponencijalne funkcije”, str. 41. – 44.
- Poglavlje „Logaritamske funkcije”, str. 45. – 50.

Eksponencijalna funkcija

Koliko puta možete presaviti papir?

Procijenite koliko puta ga moramo presaviti da postignemo debljinu od 1 cm, ako znamo da je prosječna debljina jednog papira 0.1 mm?

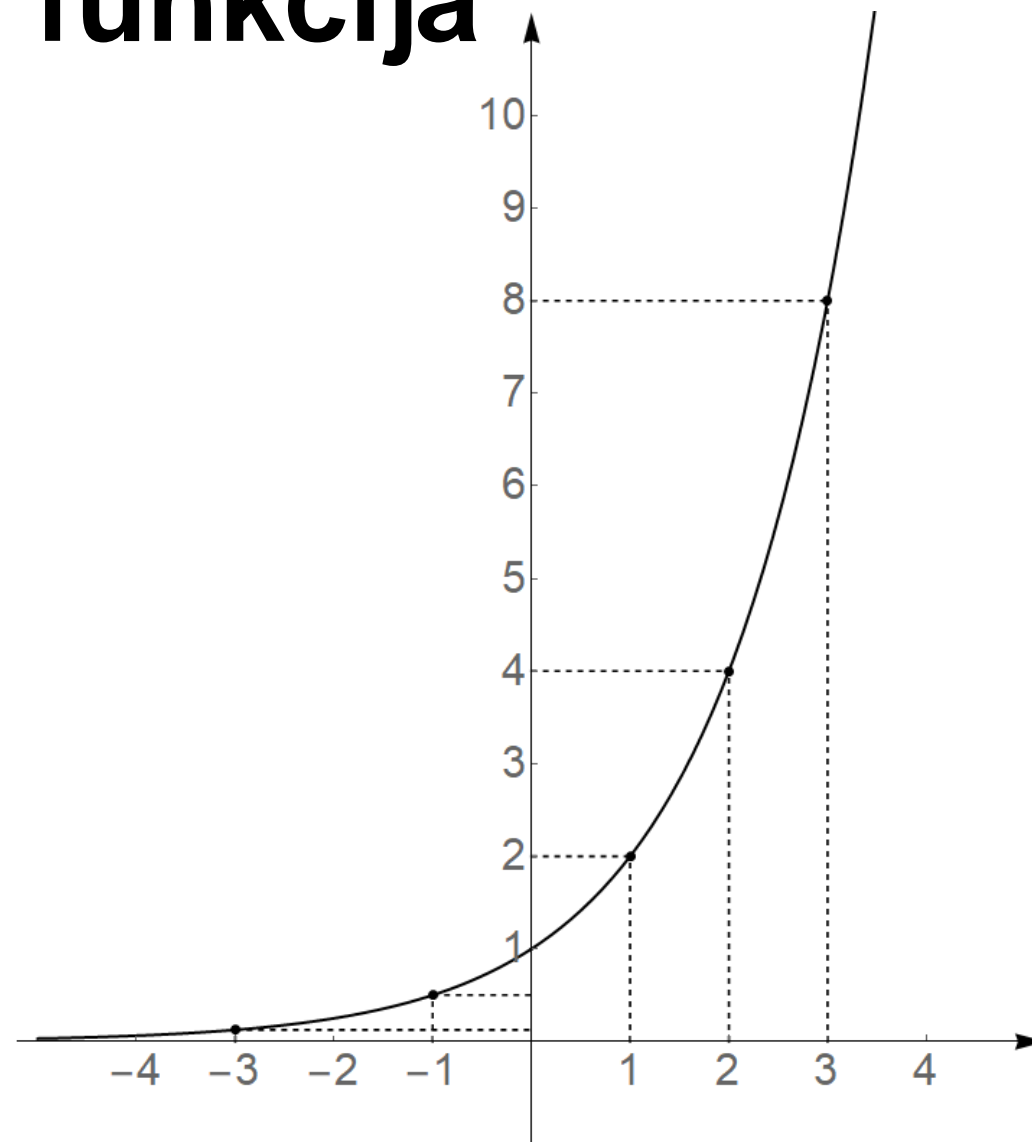
Trebamo presaviti papir **7 puta**.

Kako bi postigli debljinu presavinutog papira koja je jednaka udaljenosti Zemlje od Mjeseca, trebamo ga presavinuti **42 puta**.

Eksponeñcijalna funkcija

Prikažite grafički funkciju $f(x) = 2^x$.

x	$f(x)$
0	1
1	2
2	4
10	1024
-1	0.5
-2	0.25
-10	0.00097



Eksponecijalna funkcija

Prikažite grafički funkciju $f(x) = 2^x$.

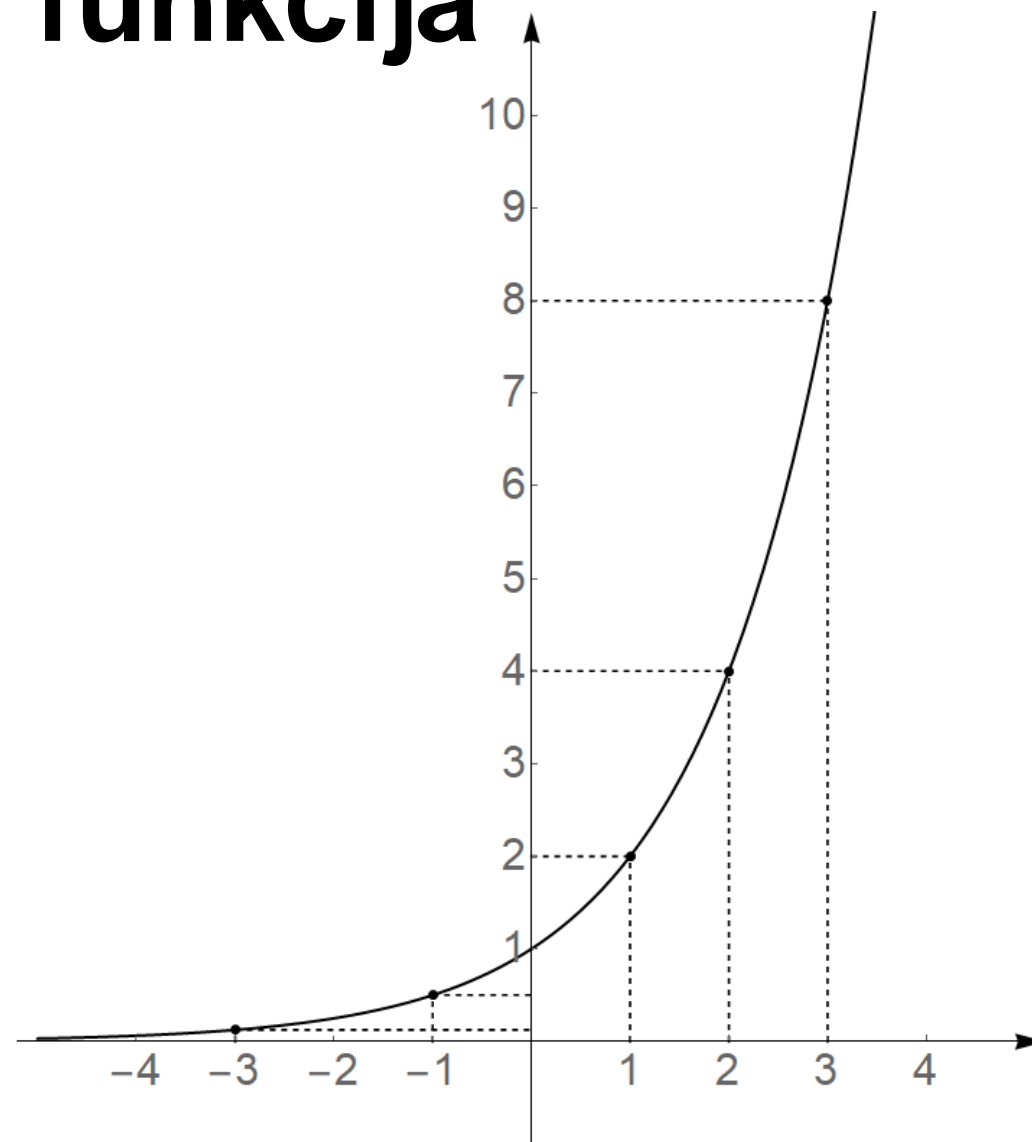
Domena funkcije: $D_f = \mathbb{R}$

Slika funkcije: $R_f = \mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty \rangle$

Nultočke funkcije: ne postoje

Sjecište s y -osi: $T(0,1)$

Rastuća funkcija



Eksponecijalna funkcija

Prikažite grafički funkciju $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

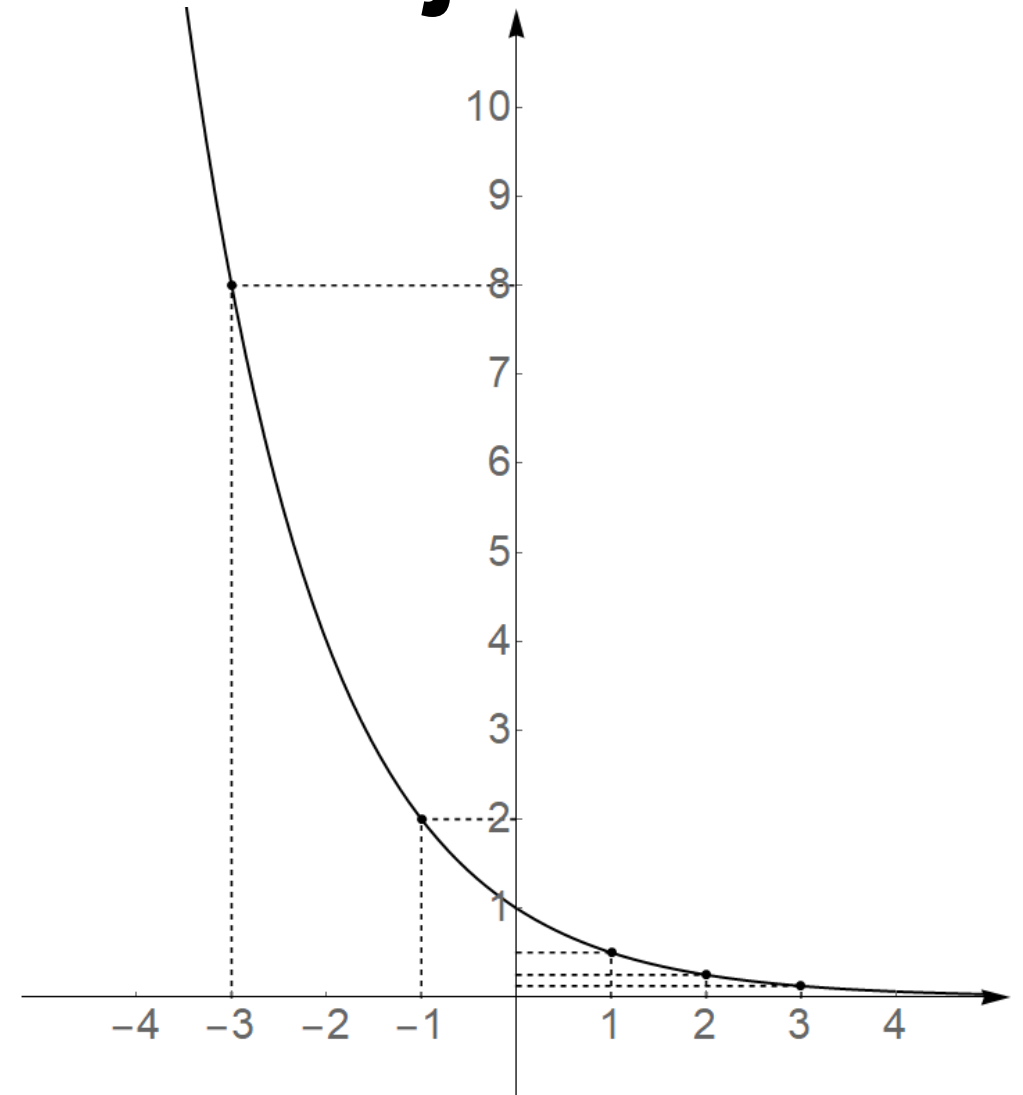
Domena funkcije: $D_f = \mathbb{R}$

Slika funkcije: $R_f = \mathbb{R}^+ = \langle 0, \infty \rangle$

Nultočke funkcije: ne postoje

Sjecište s y -osi: $T(0,1)$

Padajuća funkcija

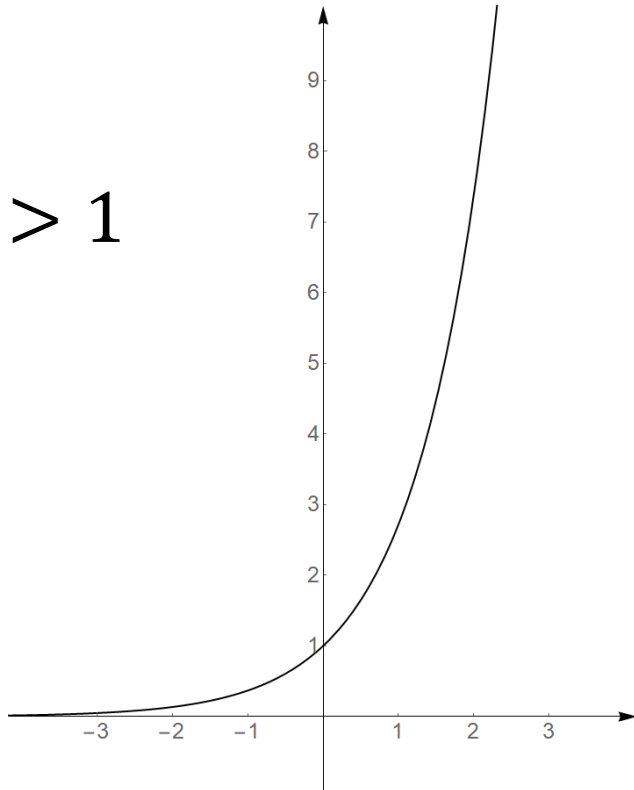


Eksponecijalna funkcija

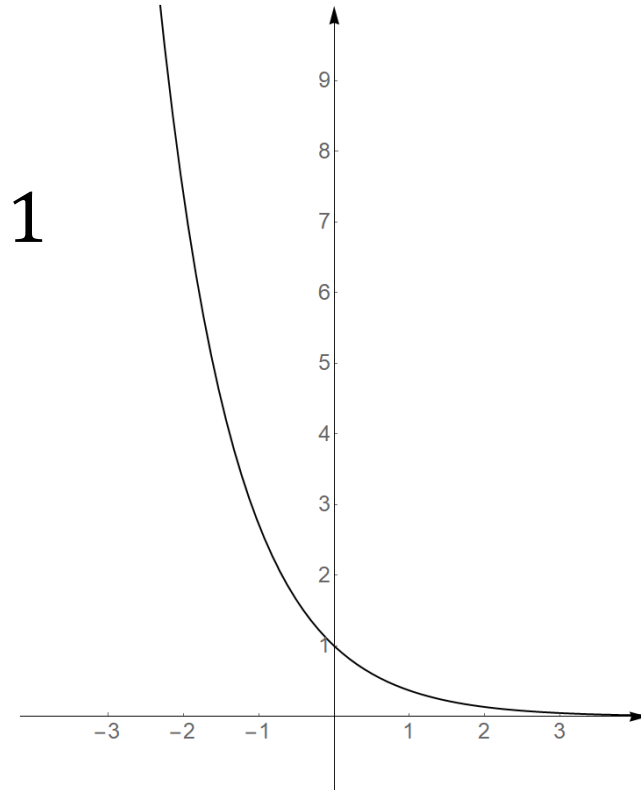
Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Funkcija $f(x) = a^x$ definirana za svaki realan broj x naziva se eksponencijalna funkcija.

$$a > 1$$



$$0 < a < 1$$

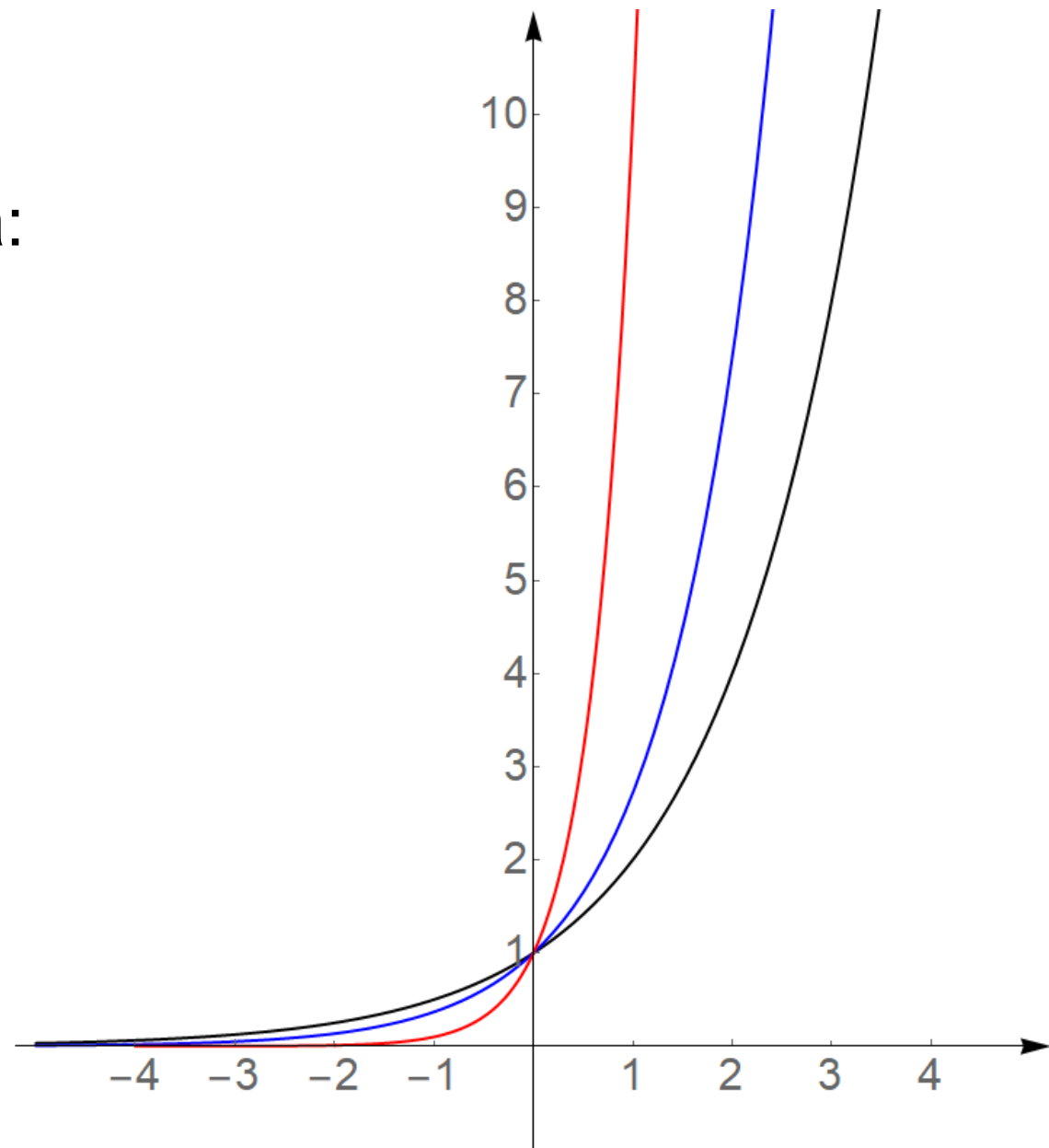


Prikažimo grafove funkcija:

$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = e^x$$

$$h(x) = 10^x$$



Eksponecijalna funkcija

Kao bazu eksponencijalne funkcije posebno ćemo istaknuti dvije vrijednosti:

Baza 10, tj. $f(x) = 10^x$

Eksponecijalni izrazi s bazom 10 se koriste u tzv. znanstvenom zapisu broja kada želimo zapisati jako male ili jako velike vrijednosti.

Udaljenost između Zemlje i

Sunca: $1.496 \cdot 10^8 \text{ km}$

Masa elektrona: $9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Baza e , tj. $f(x) = e^x$

$$e = 2.71828182\dots$$

Zašto baš ta vrijednost?

Objašnjenje u Matematičkoj analizi.

Koristili su ga već Bernoulli i Leibnitz, no samo ime broja e u 18. stoljeću uvodi Euler.

Pravila za rad s potencijama:

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$3^x \cdot 27 = 3^{x+3}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\frac{2^x}{16} = 2^{x-4}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$27^x = 3^{3x}$$

$$a^x \cdot b^x = (ab)^x$$

$$2^{2x} \cdot 3^x = 4^x \cdot 3^x = 12^x$$

$$\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

$$\frac{2^{3x}}{3^{2x}} = \frac{8^x}{9^x} = \left(\frac{8}{9}\right)^x$$

Pravila za rad s potencijama:

$$\frac{1}{a^x} = a^{-x}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$\frac{1}{a} = a^{-1}$$

$$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a}} = a^{-\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[4]{a^5} = a^{\frac{5}{4}}$$

Eksponeñcijalne jednadžbe

Pravila za rad s potencijama nam omogućavaju rješavanje jednog dijela eksponencijalnih jednadžbi

$$a) 3^x = 27 \qquad x = 3$$

$$b) 10^{2x} \cdot 0,1 = 1000^{\frac{x}{2}} \qquad x = 2$$

$$c) \left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^7 \qquad x = -6$$

$$d) 10^{x^2+x} \cdot 4 = 5^{2x+2} \cdot 4^{x^2} \qquad x_1 = -1, \quad x_2 = 2$$

Logaritamska funkcija

Inverzna funkcija eksponencijalne funkcije $f(x) = a^x$ (za kojeg vrijedi $a > 0, a \neq 1$) naziva se logaritamska funkcija $f^{-1}: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, i pišemo $f^{-1}(x) = \log_a x$.

Domena logaritamske funkcije: $D_f = \langle 0, \infty \rangle$

Nultočka logaritamske funkcije: $x = 1$

Vrijedi: $\log_a(a^x) = x$, $a^{\log_a x} = x$, $\log_a 1 = 0$

Logaritamska funkcija

Svojstva logaritama:

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a b^x = x \cdot \log_a b$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a a^x = x$$

$$\log_a x = \frac{\log_c x}{\log_c a}$$

Logaritamska funkcija

Prikažite grafički funkciju $f(x) = \log_2(x)$.

x	$f(x)$
1	0
2	1
4	2
8	3
0.5	-1
0.125	-3
0	ne postoji, $-\infty$

$$f(1) = \log_2 1 = 0$$

$$f(2) = \log_2 2 = 1$$

$$f(4) = \log_2 2^2 = 2$$

$$f(8) = \log_2 2^3 = 3$$

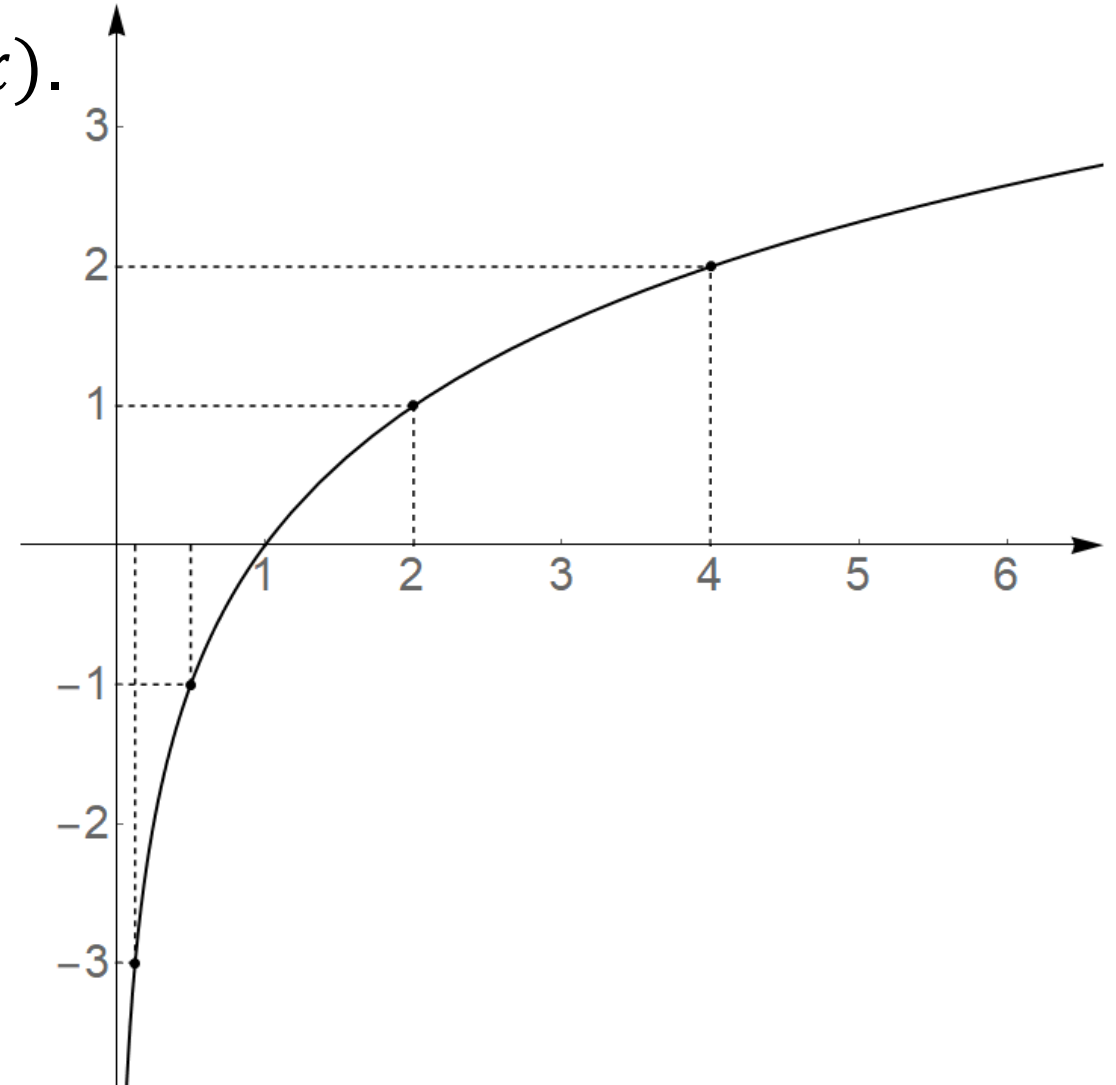
$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \log_2 2^{-1} = -1$$

$$f\left(\frac{1}{8}\right) = \log_2 2^{-3} = -3$$

Logaritamska funkcija

Prikažite grafički funkciju $f(x) = \log_2(x)$.

x	$f(x)$
1	0
2	1
4	2
8	3
0.5	-1
0.125	-3
0	ne postoji, $-\infty$

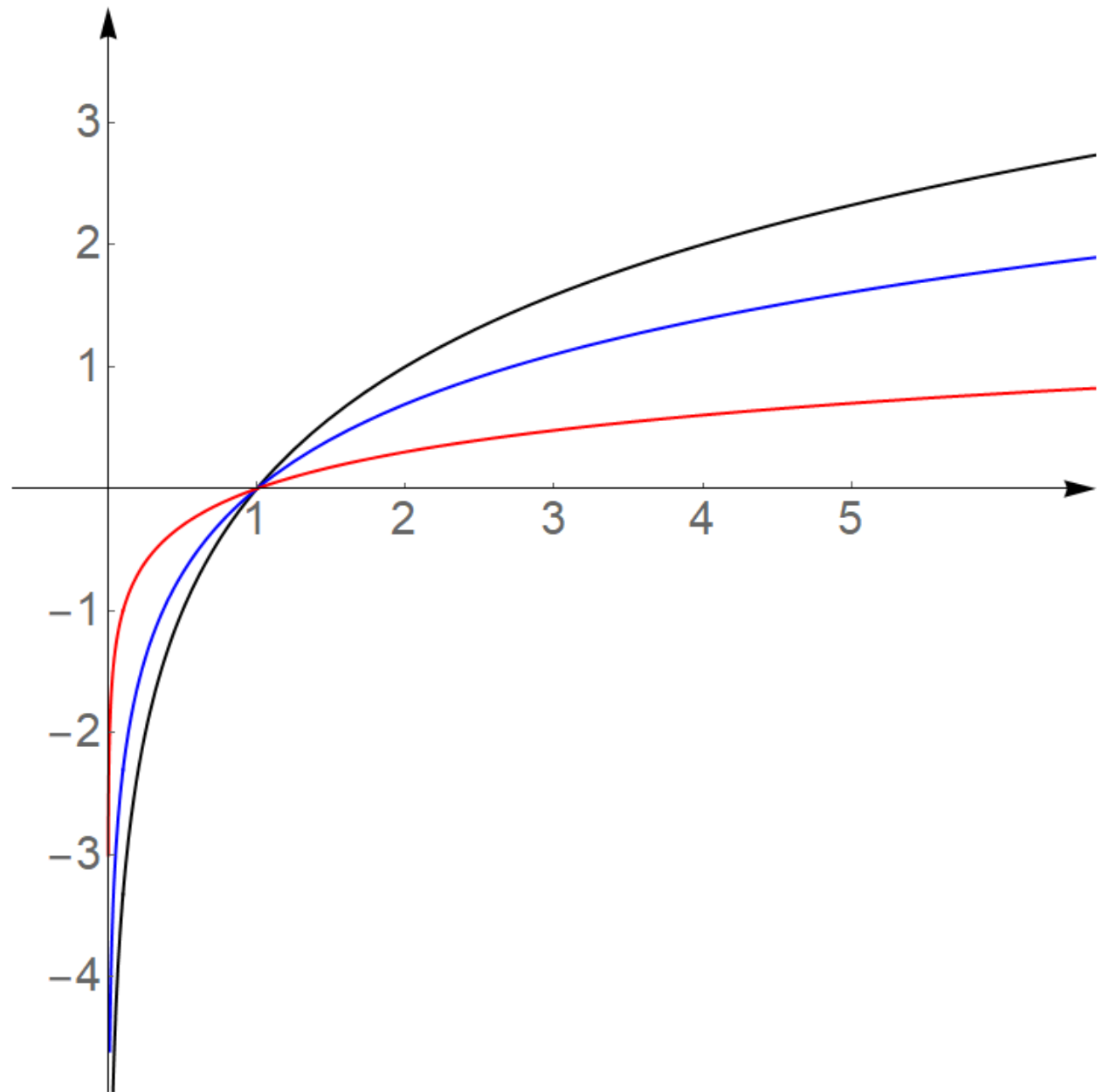


Prikažimo grafove funkcija:

$$f(x) = \log_2 x$$

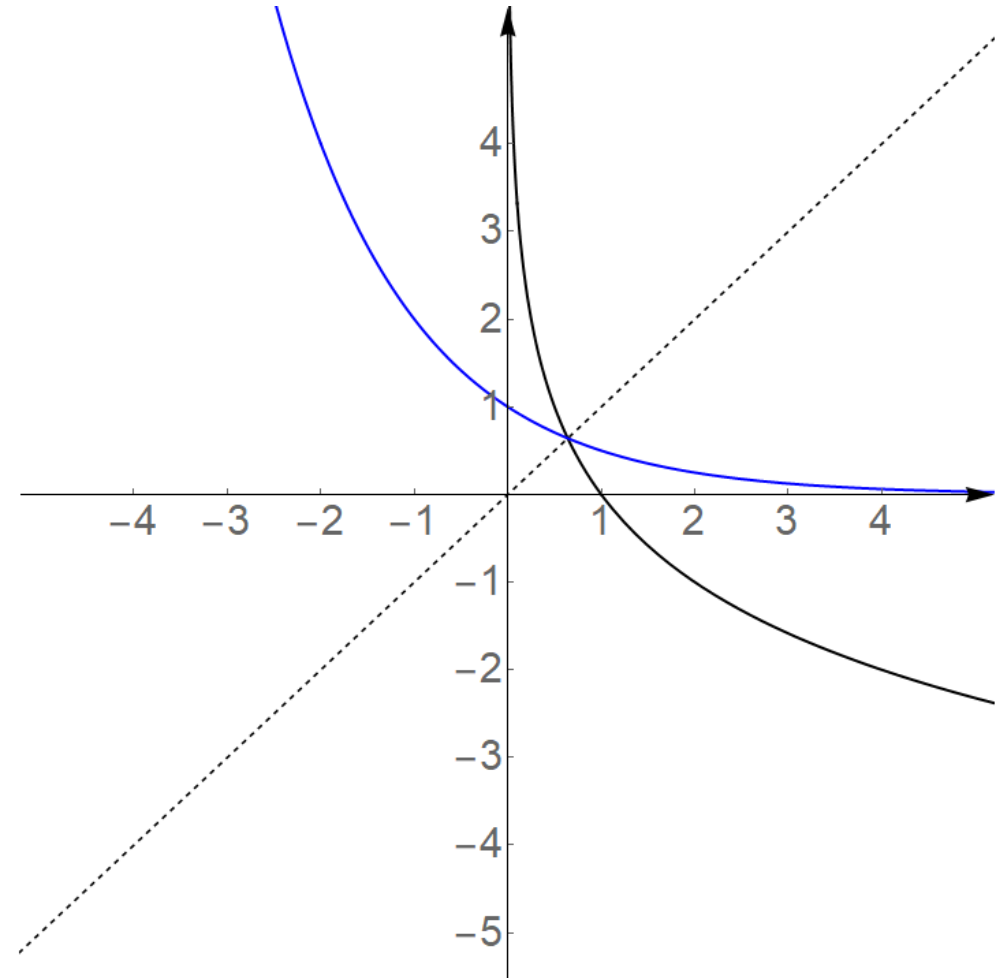
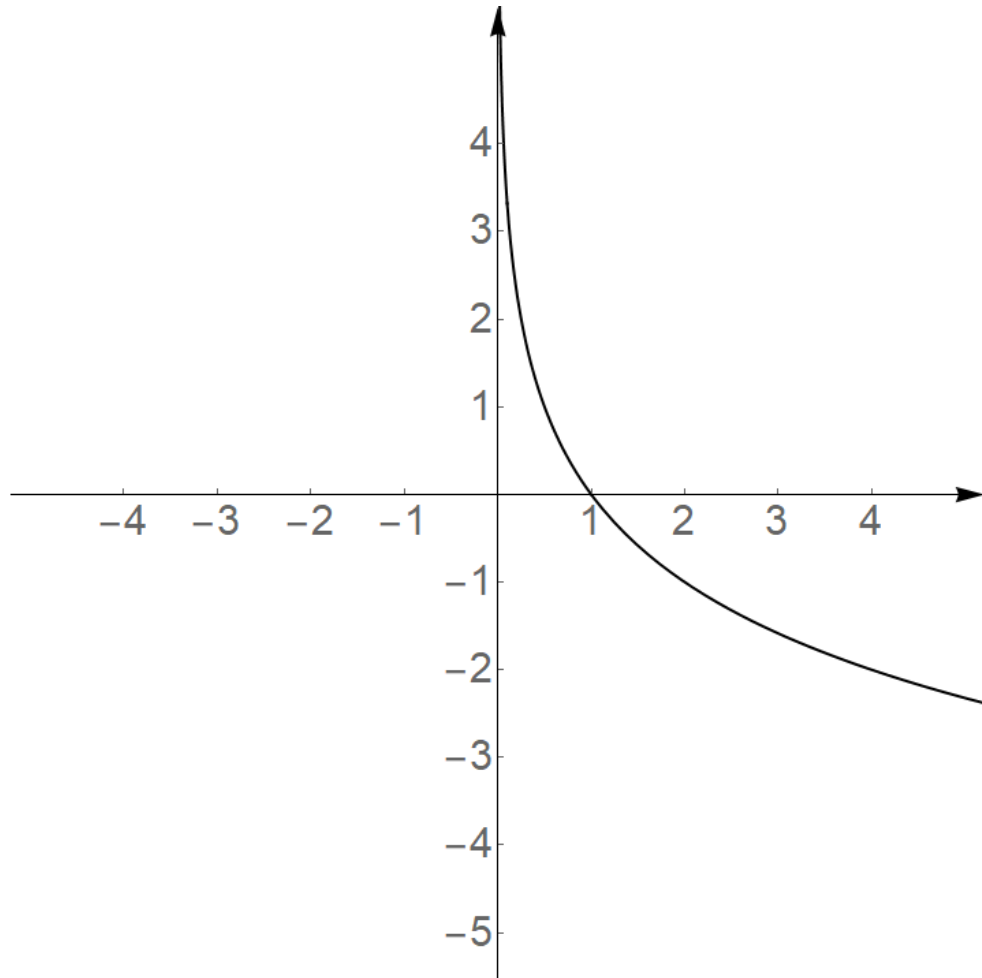
$$g(x) = \log_e x = \ln x$$

$$h(x) = \log_{10} x = \log x$$



Logaritamska funkcija

Prikažite grafički funkciju $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$.

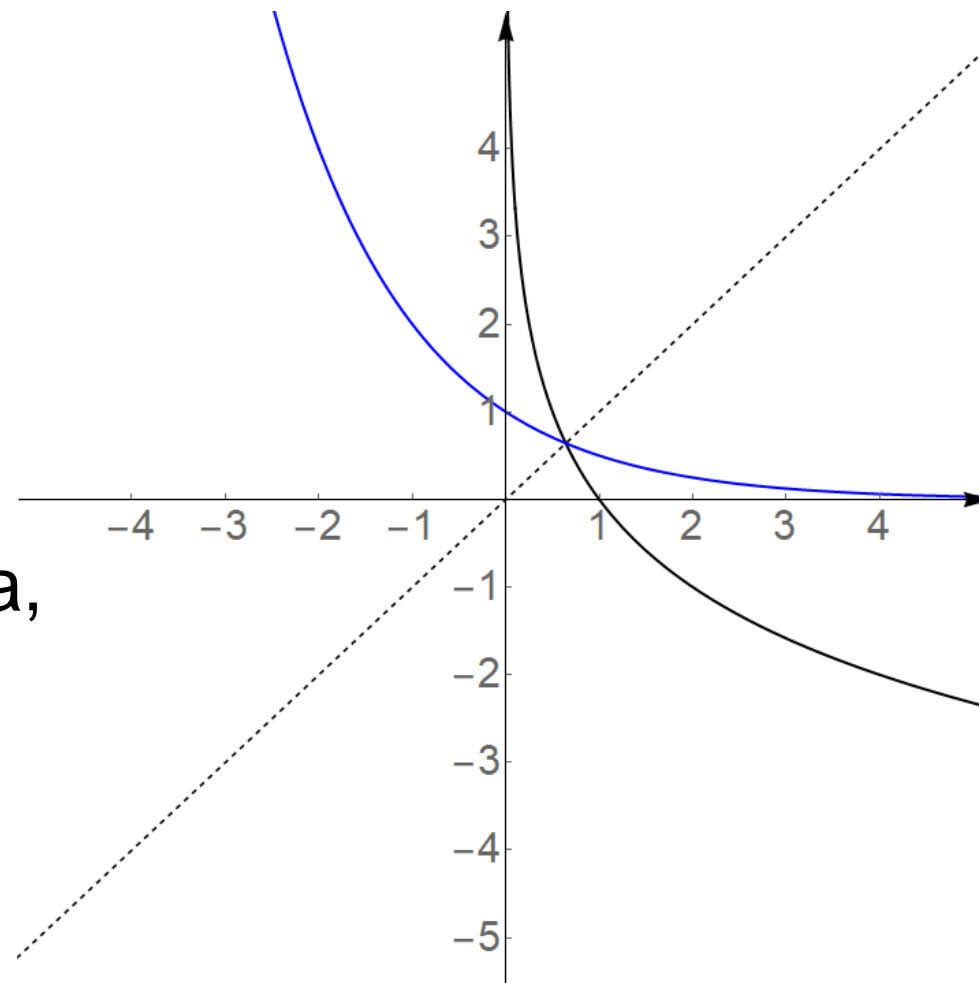


Logaritamska funkcija

Prikažite grafički funkciju $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x)$.

$$f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

Grafovi inverznih funkcija se zrcale obzirom na simetralu 1. i 3. kvadranta, $y = x$.



Logaritamska funkcija

Logaritamska funkcija nam omogućava rješavanje eksponencijalnih jednačbi koje nemaju cjelobrojna (ili racionalna) rješenja.

$$3^{x-2} = 8 \quad | \log_3$$

$$\log_3 3^{x-2} = \log_3 8$$

$$x - 2 = \log_3 8$$

$$x = 2 + \log_3 8$$

$$3^{x-2} = 8 \quad | \ln$$

$$\ln 3^{x-2} = \ln 8$$

$$(x - 2) \ln 3 = \ln 8$$

$$x - 2 = \frac{\ln 8}{\ln 3}$$

$$x = 2 + \frac{\ln 8}{\ln 3}$$

Logaritamska funkcija

Riješite jednađbu: $5^{x-1} = 2^{2x}$

$$5^{x-1} = 2^{2x} \quad | \ln$$

$$x \cdot \ln 5 - \ln 5 = x \cdot \ln 4$$

$$\ln 5^{x-1} = \ln 2^{2x}$$

$$x \cdot \ln 5 - x \cdot \ln 4 = \ln 5$$

$$(x - 1) \ln 5 = 2x \cdot \ln 2$$

$$x \cdot (\ln 5 - \ln 4) = \ln 5$$

$$x = \frac{\ln 5}{\ln 5 - \ln 4}$$

Domaća zadaća

Riješite jednađbu: $3 \cdot 2^x = 5$

Rješenje zapišite pomoću dekadskog logaritma.

$x =$

Uputa:

- rješenje pišite bez razmaka
- razlomak $\frac{a+b}{c}$ zapišite "(a+b)/c" (bez navodnika)
- dekadski logaritam zapisujte "log(x)" (bez navodnika)
- prirodni logaritam zapisujte "ln(x)" (bez navodnika)

Domaća zadaća

Riješite jednađbu: $3 \cdot 2^x = 5$

Rješenje zapišite pomoću dekadskog logaritma.

$$x = \frac{(\log(5) - \log(3))}{\log(2)}$$

$$3 \cdot 2^x = 5 \quad | \log$$

$$\log(3 \cdot 2^x) = \log 5$$

$$\log 3 + \log 2^x = \log 5$$

$$\log 3 + x \cdot \log 2 = \log 5$$

$$x \cdot \log 2 = \log 5 - \log 3$$

$$x = \frac{\log 5 - \log 3}{\log 2}$$

Video materijali Tonija Miluna:

Graf eksponencijalne funkcije

https://www.youtube.com/watch?v=jl4hZ1NTzXo&list=PLXygsnSpBk5T4mSO2Kx1_JUBXVvnG5__d&index=1 (2 videa)

Potencije

https://www.youtube.com/watch?v=OgVZxN_3Rm4 (1 video)

Video materijali Tonija Miluna:

Eksponencijalne jednačbe

https://www.youtube.com/watch?v=WxuHFR2E_tc&list=PLXygsnSpBk5Q_wLWm7IWX5GblAmx6yE13&index=1 (prva 3 videa)

Logaritamska funkcija i svojstva

<https://www.youtube.com/watch?v=W04MTzLyXhw&index=1&list=PLXygsnSpBk5S3IKh-IYuo0ymTebziv1iK> (videa 1-4, 14 i 15)

Video materijali Tonija Miluna:

Logaritamske jednačbe

https://www.youtube.com/watch?v=KJ_vvafdJ8k&index=1&list=PLXygsnSpBk5THbWxDV0X8D3Hb34m-1xml (video 1, 4 i 5)

Domena logaritamske funkcije

<https://www.youtube.com/watch?v=8RfID07AeX8> (1 video)

<https://www.youtube.com/watch?v=HoewVjha34E> (1 video)

Hvala 😊