MATEMATIKA
Vježbe

3. ishod

Matrice

Matrica (reda ili formata m,n ili mn) je pravokutna shema elemenata a_{ij} koji su poredani u m redaka i n stupaca.

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Reci matrice

Oznaka matrice

Stupci matrice

Ova matrica dakle ima
- n stupaca
- m redaka

TIP ili FORMAT matrice A prikazuje koliko matrica ima elemenata i na koji način su ti elementi poredani.

Skup svih realnih matrica tipa (m,n) označavamo sa $M_{mn}(\mathbb{R})$ ili M_{mn} .

Ako je $A \epsilon M_{mn}$ onda kažemo da je A realna matrica tipa (m,n).

Matrice

Elementi matrice

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Elementi matrice

Oznaka elementa:

opći element matrice $\leftarrow a_{ij} \rightarrow$ Indeksi mjesta na kojem se nalazi element a: i – ti redak, j – ti stupac

Element matrice a_{ij} nalazi se na presjeku i-tog retka i j-tog stupca.

$$A_{mn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. redak matrice

2. stupac matrice

Matrice

KVADRATNA MATRICA

Ukoliko je m=n matrica se naziva kvadratnom matricom.

$$A_n = [a_{ij}], i, j \in \{1, \dots, n\} \qquad A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Glavna dijagonala

Glavna dijagonala je uređena n-torka brojeva $(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$

DIJAGONALNA MATRICA

Kvadratna matrica $A_n = [a_{ij}], i, j \in \{1, \dots, n\}$ u kojoj su svi elementi izvan glavne dijagonale jednaki 0, tj.

$$A_n = \begin{cases} a_{ij} = 0, za\ i \neq j \\ a_{ij} \neq 0, za\ i = j \end{cases} \qquad A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice

JEDINIČNA MATRICA

Dijagonalna matrica $A_n = [a_{ij}], i, j \in \{1, \dots, n\}$ u kojoj su svi elementi glavne dijagonale jednaki 1, tj.

$$I_n = \begin{cases} a_{ij} = 0 \text{ , } za \ i \neq j \\ a_{ij} = 1 \text{ , } za \ i = j \end{cases}$$

ili $a_{11} = a_{22} = a_{33} = \dots = a_{nn} = 1$

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

NUL MATRICA MATRICA

Matrica $A_{mn} = [a_{ij}], i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}$ u kojoj su svi elementi jednaki 0, tj.

$$O_{mn} = \{a_{ij} = 0 \text{ , } za \ svaki \ i \text{ , } j$$

$$O_{mn} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice

TRANSPONIRANA MATRICA

Kažemo da je matrica B transponirana matrica matrice $A = [a_{ij}]$ formata (m,n) ako je

$$B = \begin{cases} formata\ (n,m) \\ a_{ij} = b_{ji}\ , za\ svaki\ i,j \end{cases} ,\quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \qquad \text{i pišemo } B = A^\tau$$

Drugim riječima.
Ako matrici A zamijenimo retke i stupce (i to tako da 1. redak pišemo kao prvi stupac, 2. redak ako 2. stupac, etc.) dobijemo matricu A^τ koja je transponirana matrica matrici A.

SIMETRIČNA MATRICA

Kvadratna matrica $A_n = [a_{ij}], i, j \in \{1, \dots, n\}$ u kojoj vrijedi

$$A_n = \{a_{ij} = a_{ji}\ , za\ svaki\ i,j$$

$$A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Matrice

JEDNAKOST MATRICA

Neka su m i n prirodni brojevi.
Matrice A i B su jednake i pišemo A = B onda i samo onda ako su

» one istog tipa
» im svi elementi jedna' '

Tj.

$$A = B \Leftrightarrow \begin{cases} A \; i \; B \; su \; istog \; formata \; (m, n) \\ a_{ij} = b_{ij} \; , za \; svaki \; i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} \end{cases}$$

ZBRAJANJE MATRICA

Matrice se mogu zbrajati samo ako su istog tipa (m,n), a kao rezultat se dobije matrica

$$A, B \; su \; tipa \; (m, n) \Rightarrow C = A + B \; tipa \; (m, n)$$

koja je također tipa (m,n) , tj.

Elementi matrice C dobiju se zbrajanjem elemenata matrica A i B na istom mjestu, tj. $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, za \; svaki \; i, j$

Matrice

MNOŽENJE MATRICE SKALAROM

Ponovimo: skalar je realni broj
Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$, $A = [a_{ij}]$ matrica formata (m,n).

Matrica se množi skalarom tako da se svaki njeni element pomnoži skalarom, tj.

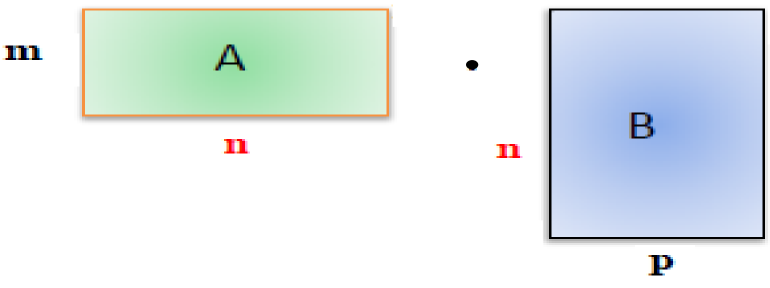
$$\lambda \cdot A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}$$

Oduzimanje matrica $A - B$ definira se kao $A - B = A + (-1) \cdot B$

Matrice

MNOŽENJE MATRICA

2 matrice možemo međusobno pomnožiti samo ako su ulančane, tj.



Ako matrica A ima onoliko stupaca koliko matrica B ima redaka (onda za matrice A i B kažemo da su ulančane).

$$A_{(m,n)} \cdot B_{(n,p)} = C_{(m,p)}$$

Element c_{ij} matrice $A \cdot B = C$ dobije tako da se elementi i-tog retka matrice A pomnože redom elementima j-tog stupca matrice B te se dobiveni produkti zbroje:

$$a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nj} = c_{ij}$$

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}_{(m,n)} \cdot \begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & b_{nj} & \cdots & \cdots \end{bmatrix}_{(n,p)} = \begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & c_{ij} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}_{(m,p)}$$

Zadaci

9.1. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Izračunajte:

a) $A + B$
b) $2A^T - 3B^T$
c) $2A + B^T$

9.2. Zadane su matrice $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & -1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ i $C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

Izračunajte:

a) $A \cdot B$
b) $C \cdot B$ i $B \cdot C$
c) $A + C$

Zadaci

9.3. Izračunajte $A^T \cdot A$ i $A \cdot A^T$ ako je $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$.

9.4. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$. Izračunajte $f(A)$, ako je $f(x) = x^3 - x + 3$.

9.5. Odredite sve parametre $x, y, z \in \mathbb{R}$ za koje su matrice A i B jednake.

$$A = \begin{bmatrix} x+3 & 4 \\ 1 & 2y \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2x & 4 \\ x+z & 1+y \end{bmatrix}$$

9.6. Odredite sve parametre $x, y \in \mathbb{R}$ za koje su matrice A i B komutativne obzirom na množenje ako je:

$$A = \begin{bmatrix} x & x \\ x-1 & x \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 6x & 1 \end{bmatrix}$$

Zadaci

9.7. Odredite sve parametre $x, y \in \mathbb{R}$ za koje je matrica $A \cdot B$ simetrična.

$$A = \begin{bmatrix} x & y & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & x & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

9.8. Riješite sljedeće matrične jednadžbe:

a) $A - 2X = 3B$, ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

b) $2A^T - \frac{1}{2}(X + I) = B$, ako je $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Knjiga „*Matematika za IT*”, QR kod str. 139.

Sustav linearnih jednadžbi

Sustav linearnih jednadžbi rješavamo Gauss-Jordanovom metodom tako da proširenu matricu sustava $[A|b]$ elementarnim transformacijama prevodimo u matricu oblika $[I|b']$.

Elementarne transformacije :

- množenje ili dijeljenje retka brojem različitim od nule
- zamjena redaka / stupaca
- množenje retka brojem različitim od nule i pribrajanje nekom drugom retku

Zadaci

10.1. Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & + & z & = & 2 \\ x & + & 2y & + & z & = & 3 \\ x & + & y & + & 2z & = & -1 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 3y & - & z & = & -8 \\ 2x & & & + & 3z & = & 12 \\ & & 2y & + & z & = & 0 \end{array}$$

Zadaci

10.2. Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:

a)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\
-2x_1 & & & + & x_3 & = & -2 \\
x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = & 3 \\
-x_1 & + & 2x_2 & + & 12x_3 & = & 1
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{rcrcrcr}
x & + & y & - & z & = & 4 \\
x & + & y & + & z & = & 2
\end{array}
$$

Zadaci

10.3. Gauss-Jordanovom metodom riješite sustav:

a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 5 \\ 2x & + & y & & & = & -1 \\ 3x & - & y & + & z & = & 2 \end{array}$$

b)

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & y & & & - & w & = & 5 \\ x & - & y & - & 2z & + & w & = & 1 \end{array}$$

Zadaci

10.4. Gauss-Jordanovom metodom odredite inverz matrice:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadaci

10.5. Gauss-Jordanovom metodom odredite inverz matrice:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

b)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Knjiga *„Matematika za IT”*, QR kod str. 147.

Determinante

Svakoj kvadratnoj matrici $A_{(n,n)}$ može se pridružiti realni broj $|A| = \det A$

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanta je funkcija koja preslikava skup kvadratnih matrica M_n u skup realnih brojeva , tj. $\det A \colon M_n \to \mathbb{R}$ definiran na slijedeći način:

$$n = 1 \quad A = [a_{11}] \; detA = a$$

$$n = 2 \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Determinante

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Mjesto na kojem se nalazi element po kojem razvijamo determinantu

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum a_{ij} \cdot \boxed{(-1)^{i+j} \cdot det A_{ij}} \quad i = 1, \cdots, n$$

Element matrice po kojem razvijamo determinantu

Algebarski komplement

Determinanta matrice bez i-tog retka i j-tog stupca

La Place-ov razvoj determinante

La Placeov razvoj determinante matrice može ići ili po retku ili po stupcu.

Determinante

Laplace-ov razvoj

Po i-tom retku: $$detA = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot detA_{ij}$$

Po j-tom stupcu: $$detA = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot detA_{ij}$$

Determinante 3. reda mogu se računati i po tzv. Sarrusovom pravilu.

$$detA = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ovo pravilo vrijedi samo za determinante matrica koje su najviše tipa 3.

Svojstva determinante

- Determinanta se množi skalarom tako da se jedan (bilo koji) njezin redak/stupac množi tim skalarom
- Ako zamijenimo dva retka/stupca matrice, determinanta mijenja predznak
- Determinanta se ne mijenja ako nekom retku/stupcu pribrojimo neki drugi redak/stupac pomnožen skalarom
- Determinanta matrice koja ima nul-redak/nul-stupac je nula
- Determinanta matrice s dva jednaka retka/stupca je nula.
- Determinanta trokutaste matrice jednaka je umnošku elemenata na dijagonali
- Transponiranjem matrice vrijednost determinante se ne mijenja:

$$\det A = \det A^T$$

- Determinanta umnoška dviju matrica jednaka je umnošku njihovih determinanti

Zadaci

11.1. Odredite determinantu matrice:

a)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

c)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

b)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

d)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Zadaci

11.2. Odredite sljedeće determinante:

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -4 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

c)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

d)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

Knjiga *„Matematika za IT”*, QR kod str. 153.

Inverz matrice

Neka je *A* regularna matrica. Inverz je dan (Cramerovom) formulom

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot [A_{ij}]^{\tau},$$

pri čemu je $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, gdje je M_{ij} determinanta matrice koja nastaje iz matrice *A* uklanjanjem *i*-tog retka i *j*-tog stupca.

Cramerova formula za inverz je jednostavna u slučaju $A \in M_2$.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Zadaci

11.3. Cramerovom formulom odredite inverz matrice:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$

11.4. Riješite sljedeće matrične jednadžbe:

a) $AXB = C$, ako je: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

b) $AX - 2X = B$, ako je: $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$.

Zadaci

11.5. Riješite sljedeće matrične jednadžbe:

a) $AX + I = B + BX$, ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}.$$

b) $(AX)^{-1} + X^{-1} = B$, ako je:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -7 & -3 \end{bmatrix}.$$

Knjiga *„Matematika za IT”*, QR kod str. 161.

Vektori

Dužinu $\overline{AB}$ kod koje razlikujemo početnu i završnu točku nazivamo usmjerena (orijentirana) dužina i označavamo $\overrightarrow{AB}$. S točkama *A* i *B* možemo zadati dvije usmjerene dužine $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BA}$, pri čemu one nisu jednake.

Vektor je skup svih usmjerenih dužina koje su međusobno paralelne (jednakog smjera), jednakih duljina i orijentacija.

Duljina vektora $\overrightarrow{AB}$ (modul, norma vektora) je duljina dužine $\overline{AB}$**.**
Oznaka $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Vektori

Vektori su **istog smjera**, ako pripadaju paralelnim pravcima ili istom pravcu. Za vektore koji su istog smjera kažemo da su kolinearni ili linearni zavisni, a za one različitog smjera da su nekolinearni, tj.linearno nezavisni.

Vektorima istog smjera možemo promatrati i **orijentaciju**. Dva vektora su iste orijentacije ako su im strelice okrenute na istu stranu, a suprotne ako pokazuju na suprotne strane.

Za vektore **s istom duljinom, smjerom i orijentacijom** kažemo da su **jednaki.**

Vektori u koordinatnom sustavu

Radij vektor (radijus vektor) točke $A(x,y,z)$ je vektor s početkom u ishodištu i s krajnjom točkom u točki A.

$$\overrightarrow{\boldsymbol{r_A}} = \overrightarrow{OA} = x \cdot \vec{\imath} + y \cdot \vec{\jmath} + z \cdot \vec{k} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$ - jedinični radij vektori

Koordinatni prikaz vektora s početnom točkom $A(x_1, y_1, z_1)$ i završnom $B(x_2, y_2, z_2)$ je:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\,\vec{\imath} + (y_2 - y_1)\,\vec{\jmath} + (z_2 - z_1)\,\vec{k}$$

Duljina vektora $\overrightarrow{AB}$ je:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Umnožak vektora

Skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot cos\varphi = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

pri čemu je φ veličina kuta među vektorima, te

$$\vec{a} = a_1\vec{\imath} + a_2\vec{\jmath} + a_3\vec{k} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \qquad \vec{b} = b_1\vec{\imath} + b_2\vec{\jmath} + b_3\vec{k} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

Vektori su okomiti ako je skalarni umnožak jednak 0.

Vektorski umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je vektor $\vec{a}\times\vec{b}$ okomit na vektore $\vec{a},\vec{b}$ i takav da vrijedi:

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = |\vec{a}|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot sin\varphi \qquad \vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{\imath} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{\jmath}. + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$$

Zadaci

12.1. Prikažite vektore s početnom točkom A i završnom točkom B ako je:

a) A(-2,3), B(3,4) b) A(-2,3,1), B(3,4,2)

12.2. Odredite početnu točku vektora $\overrightarrow{AB} = -3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath}$ ako mu je završna točka:

a) B(0,0) b) B(4,-6) c) B(-3,5).

Danom vektoru zatim odredite i modul.

12.3. Odredite početnu točku vektora $\overrightarrow{AB} = -3\vec{\imath} + 5\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ ako mu je završna točka:

a) B(0,0,0) b) B(4,-6,1) c) B(-3,5,0).

Danom vektoru zatim odredite i modul.

Zadaci

12.4. Odredi nepoznatu koordinatu točke $A(2, y, 3)$ tako da duljina vektora $\overrightarrow{AB}$,gdje je $B(-1,2,0)$ bude jednaka 6.

12.5. Dane su točke $M(2,3,-1)$, $N(-1,4,0)$ i $P(2,-3,1)$. Linearnom kombinacijom okomitih jediničnih vektora $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}, \vec{k}$ prikažite vektore:

a) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP}$ b) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PN}$ c) $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MP}$

d) $4\,\overrightarrow{MN} - 3\,\overrightarrow{NP}$ e) $\frac{1}{2}\,\overrightarrow{MN} + \frac{3}{4}\,\overrightarrow{NP}$

12.6. Odredite kut među vektorima:

a) $\vec{a} = -3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = 3\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix}$

Zadaci

12.7. Odredite realni broj *t* tako da vektori budu okomiti:

a) $\vec{a} = t\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ i $\vec{b} = \vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 2\vec{k}$

b) $\vec{a} = \begin{bmatrix} 6 \\ -t \\ t+1 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ t+7 \\ -2 \end{bmatrix}$

12.8. Za $\vec{a} = (1,1,0)$ i $\vec{b} = (-1,2,1)$ odredite:

a) $\vec{a} \times \vec{b}$ b) $\vec{b} \times \vec{a}$ c) $2\vec{a} \times 3\vec{b}$

12.9. Odredite površinu trokuta i paralelograma razapetih vektorima

$\vec{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $\vec{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Knjiga *„Matematika za IT”*, QR kod str. 172.

Hvala na pažnji!