Zadatci 3.1.

1. Nacrtaj u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija:

1) $f(x) = x^2$, $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, $f(x) = 2x^2$, $f(x) = \frac{3}{2}x^2$;

2) $f(x) = -x^2$, $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$, $f(x) = -2x^2$, $f(x) = -\frac{3}{2}x^2$.

Opiši kako smještaj i oblik grafa ovise o koeficijentu a polinoma $f(x) = ax^2$.

2. Nacrtaj u istom koordinatnom sustavu grafove sljedećih funkcija:

$f(x) = 2x^2 - 1$, $f(x) = 2x^2 + 1$, $f(x) = -2x^2 - 1$, $f(x) = -2x^2 + 1$.

3. Prikaži grafički funkcije:

1) $f(x) = -x^2 + 3$; 2) $f(x) = 2x^2 + 5$;

3) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$; 4) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 1$.

4. Nacrtaj u istom koordinatnom sustavu grafove sljedećih funkcija:

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2$, $f(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2$,

$f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2$, $f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2$.

5. Nacrtaj grafove sljedećih funkcija:

1) $f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^2$;

2) $f(x) = -(x-2)^2$;

3) $f(x) = -\frac{1}{2}(x+3)^2$;

4) $f(x) = 2(x-5)^2$.

6. Nacrtaj grafove sljedećih funkcija:

1) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 3$;

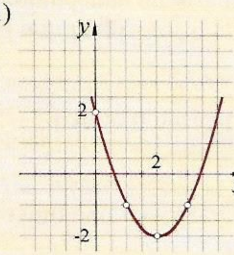
2) $f(x) = -(x-1)^2 + 1$;

3) $f(x) = \frac{1}{4}(x-3)^2 - 1$;

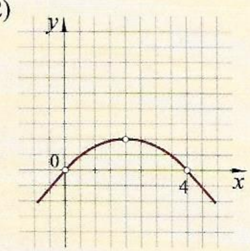
4) $f(x) = 2(x-2)^2 + 2$.

7. Na slikama su grafovi četiriju kvadratnih funkcija $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$. O kojim se funkcijama radi?

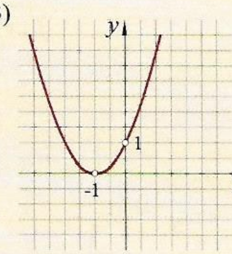
1)



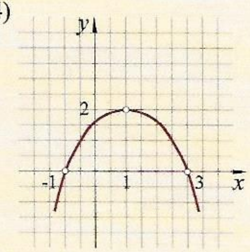
2)



3)



4)



8. Odredi polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + c$ i nacrtaj njegov graf ako je:

1) $f(0) = -1$, $f(2) = 1$;

2) $f(2) = 1$, $f(1) = \frac{5}{2}$;

3) $f(-1) = 2$, $f(2) = -1$;

4) $f(1) = -3$, $f(-2) = 3$.

9. Odredi polinom drugog stupnja i nacrtaj njegov graf ako je $f(2) = f(-2) = 2$ te $f(0) = -2$.

10. Odredi polinom drugog stupnja $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ i nacrtaj njegov graf ako je $f(-2) = f(0) = 3$ te $f(-1) = 1$.

11. Polinom $f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$ najveću vrijednost $y_0 = 1$ prima za $x_0 = 2$ i vrijedi $f(1) = 0$. Odredi koeficijent a i nacrtaj graf tog polinoma.

12. Parabola $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ ima tjeme u točki $(-2, -3)$ te prolazi ishodištem koordinatnog sustava. Odredi koeficijent a i nacrtaj tu parabolu.

13. Odredi polinom drugog stupnja ako je $f(0) = f(3) = 3$ te $f\left(\frac{3}{2}\right) = 0$. Nacrtaj graf tog polinoma.

Zadatci 3.2.

1. Navedene funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ zapiši najprije u obliku $f(x) = a(x-x_0)^2 + y_0$, te zatim nacrtaj njihove grafove:

1) $f(x) = x^2 - 2x - 3$;
2) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$;
3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 6$;
4) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$;
5) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$;
6) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 8$.

2. Odredi polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ i nacrtaj njegov graf ako je:

1) $f(-1) = -2$, $f(0) = 1$, $f(1) = 0$;
2) $f(1) = -2$, $f(2) = -2$, $f(4) = 4$;
3) $f(1) = -1$, $f(2) = -2$, $f(-2) = 7$.

3. Prikaži grafički funkcije:

1) $f(x) = (1 - |x|) \cdot (1 + x)$;
2) $f(x) = (1 + |x|) \cdot (1 - x)$;
3) $f(x) = |x - 1| \cdot (1 - |x|)$.

4. Kako glasi jednadžba parabole koja je simetrična paraboli $y = -x^2 + x + 2$ s obzirom na:

1) os apscisa; 2) os ordinata; 3) ishodište?

5. Os simetrije parabole je pravac $x = \frac{3}{2}$. Parabola prolazi ishodištem koordinatnog sustava i točkom $\left(1, \frac{2}{3}\right)$. Odredi njezinu jednadžbu.

— ◆ —

6. Odredi ekstremne vrijednosti sljedećih polinoma drugog stupnja:

1) $f(x) = x^2 + x - 3$;
2) $f(x) = -2x^2 - 2x + 1$;
3) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$;
4) $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 - x + 11$;
5) $f(x) = 3x^2 - x - 1$.

7. Nacrtaj graf funkcije te odredi područje njezinog pada i rasta:

1) $f(x) = x^2 - x - 2$;
2) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$;
3) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$;
4) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 6$;
5) $f(x) = x^2 + 3x$;
6) $f(x) = x(2 - x)$.

8. Odredi koordinate tjemena, opiši tijek i skiciraj parabole:

1) $y = x^2 - 4x + 5$; 2) $y = \frac{1}{2}x^2 + 3x - 1$;
3) $y = -2x^2 - x + 3$; 4) $y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$.

9. Funkcija $f(x) = ax^2 + 3x - 1$ najmanju vrijednost prima za $x = -1$. Koliko ta vrijednost iznosi?

10. Najveća vrijednost funkcije $f(x) = -2x^2 + bx + 1$ iznosi 3. Za koji x funkcija postiže tu vrijednost?

— ◆ —

11. Za koji c, $c \in \mathbb{R}$, polinom $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + c$ ima najmanju vrijednost 4?

12. Odredi polinom drugog stupnja za koji je $f(0) = 3$ i koji najveću vrijednost 4 postiže za $x = 1$.

13. Za polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi $f(0) = f(6) = 5$ te $f(1) = 0$. Za koji x taj polinom prima najmanju vrijednost? Koliko ta vrijednost iznosi?

14. Najmanja vrijednost polinoma drugog stupnja iznosi -1 te je $f(0) = f(2) = 2$. Odredi taj polinom.

15. Za polinom f drugog stupnja vrijedi $f(-3) = f(1) = 0$ a najveća vrijednost polinoma iznosi 2. Odredi vodeći koeficijent a tog polinoma.

16. Najveća vrijednost polinoma drugog stupnja je $\frac{13}{4}$. Također vrijedi da je $f(-1) = f(2) = 1$. Koji je to polinom?

17. Odredi ekstremnu vrijednost kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ ako je $f(0) = -1$, $f(2) = 1$, $f(-4) = -13$.

18. Tjeme parabole je točka $T = (1, 0)$, a parabola prolazi točkom $(-1, 2)$. Napiši jednadžbu parabole.

19. Tjeme parabole je točka $(-2, 0)$, a parabola siječe os ordinata u točki $(0, -3)$. Kako glasi jednadžba te parabole?

20. Parabola prolazi ishodištem koordinatnog sustava, a njezino je tjeme točka $T = (-1, -2)$. Odredi jednadžbu parabole.

21. Parabola siječe os ordinata u točki $(0, -1)$. Tjeme parabole je točka $T = (2, 1)$. Kako glasi jednadžba parabole?

22. Tjeme parabole je točka $T = (0, 3)$, a parabola prolazi i točkom $(2, -1)$. Odredi jednadžbu parabole.

23. Jednadžbom $y = kx^2 - 2x + 1$, $k \in \mathbb{R}$ dan je skup parabola.

1) Odredi skup točaka ravnine što ga čine tjemena svih parabola tog skupa.
2) Dokaži da sve parabole iz danog skupa prolaze jednom točkom ravnine.

24. Odredi pozitivne brojeve x i y, $x + y = 5$, tako da broj $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ bude najmanji moguć.

25. Broj a rastavi na dva pribrojnika tako da njihov umnožak bude što je moguće veći.

— ◆ —

26. Koja je točka pravca $y = x + 1$ najbliža točki $A = (3, 0)$?

27. Na osi x odredi točku za koju je zbroj kvadrata udaljenosti od točaka $A = (2, 4)$ i $B = (8, 2)$ najmanji.

28. U skupu pravokutnih trokuta kojima je zbroj duljina kateta 10, odredi onaj

1) s najkraćom hipotenuzom;
2) s najvećom površinom.

29. Trokutu što ga s koordinatnim osima zatvara pravac $x + 2y = 6$ upiši pravokutnik najveće površine i to tako da su dvije stranice pravokutnika na koordinatnim osima.

30. Koji od pravokutnika opsega 8 cm ima najveću površinu?

31. Koji od jednakokračnih trokuta s krakom duljine 12 cm ima najveću površinu?

32. Koji pravokutnik upisan kružnici polumjera r ima najveću površinu?

33. U dani kvadrat upiši kvadrat najmanje površine.

34. U jednakokračan pravokutni trokut s katetom duljine 2 cm upisan je pravokutnik tako da mu je jedan vrh u vrhu pravog kuta trokuta. Koji od takvih pravokutnika ima najveću površinu?

35. U jednakostranični trokut duljine stranica a upisan je pravokutnik čija je jedna stranica na stranici trokuta, a dva ostala vrha pripadaju po jednoj od dviju ostalih stranica.

Koji od takvih pravokutnika ima najveću površinu?

36. U trokut s osnovicom duljine a i visinom duljine v upiši pravokutnik najveće moguće površine s tim da jedna stranica pravokutnika pripada osnovici trokuta.

37. Jednakokračnom trokutu s osnovicom duljine 18 cm i krakom 41 cm upiši jednakokračan trokut što veće površine tako da su osnovice dvaju trokuta paralelne, a da je vrh upisanog trokuta u polovištu osnovice zadanog.

38. Na dužini $\overline{AB}$, $|AB| = a$ odabrana je neka točka M te su konstruirani kvadrati $AMCD$ i $MBEF$ s raznih strana dužine $\overline{AB}$. Odredi položaj točke M tako da površina šesterokuta $AFEBCD$ bude najmanja.

39. Točkom M na stranici $\overline{AB}$ jednakostraničnog trokuta povučene su paralele stranicama $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ koje te stranice sijeku u točki P, odnosno Q. Odredi položaj točke M za koji je dužina $\overline{PQ}$ najmanje duljine.

40. Na dužini $\overline{AB}$, $|AB| = a$ odabrana je točka M te su na istu stranu dužine konstruirani jednakostranični trokuti AMD i MBC. Uz koji će položaj točke M četverokut $ABCD$ imati najmanju površinu?

Zadatci 3.3.

1. Odredi nul-točke i ekstremne vrijednosti polinoma $f(x)$ te nacrtaj njegov graf ako je:

1) $f(x) = -x^2 + x + 2$;

2) $f(x) = x^2 - x + \frac{1}{4}$;

3) $f(x) = 2x^2 - x + 1$;

4) $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + 2$;

5) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}$;

6) $f(x) = -x^2 - 2x + 1$.

2. Odredi polinom drugog stupnja čije su nul-točke suprotni brojevi te za koji je $f(0) = 2$, $f(-4) = -6$.

3. Polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima dvostruku nul-točku. Koji je to broj ako je $f(-1) = f(2)$?

4. Broj 3 jedna je nul-točka polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ako je $f(0) = 3$, a najmanja vrijednost polinoma iznosi -1, odredi taj polinom.

5. Odredi najmanju vrijednost polinoma drugog stupnja $f(x) = ax^2+bx+c$ ako je $f(-3) = f(-1) = 0$ te $f(0) = 2$.

6. Za polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ vrijedi $f(-1) = 2$, $f(0) = 2$, $f(2) = -4$. Odredi nul-točke polinoma f.

7. Broj -1 dvostruka je nul-točka polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Graf polinoma siječe os ordinata u točki $(0, -2)$. Odredi taj polinom.

8. Najveću vrijednost $y_0 = \frac{9}{2}$ polinom drugog stupnja prima za $x_0 = 1$. Ako je k tome $f(0) = 4$, odredi nul-točke ovog polinoma.

9. Polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ ekstremnu vrijednost prima za $x_0 = -2$. Ako je broj 1 jedna nul-točka toga polinoma, odredi drugu njegovu nul-točku.

10. Ako su -1 i 2 nul-točke polinoma drugog stupnja, a najveća vrijednost polinoma iznosi 3, odredi taj polinom.

11. Odredi jednadžbu one parabole koja siječe y-os u točki s ordinatom 3, a x-os u točkama s apscisama -1 i 4.

12. Odredi jednadžbu one parabole koja dira os apscisa u točki s apscisom 3, a prolazi točkom $(5, 12)$.

13. Odredi kvadratnu funkciju koja ima nul-točku -2, a tjeme $(3, 4)$.

14. Najmanja vrijednost polinoma $f(x) = ax^2+bx+c$ je -2, brojevi -1 i 3 nul-točke su tog polinoma. Odredi koeficijente a, b i c.

15. Pravac $x = -3$ os je simetrije parabole $y = ax^2 + bx + c$, a $x_1 = -6$ jedna je njezina nul-točka. Ako je k tome ordinata tjemena 3, odredi jednadžbu parabole.

16. Odredi polinom f drugog stupnja ako je $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$, a $-\frac{3}{2}$ je njegova dvostruka nul-točka.

17. Odredi polinom drugog stupnja $f(x) = ax^2 + bx + c$ koji ima dvostruku nul-točku i za koji je $f(0) = f(-4) = -2$.

18. Raketa

Ispalimo li signalnu raketu s tla vertikalno uvis početnom brzinom $v_0 = 75$ m/s, ona će nakon t sekundi biti na visini h, pri čemu je $h(t) = -5t^2 + v_0 t$.

1) Na kojoj će visini biti raketa nakon 10 sekundi?

2) Nakon koliko će vremena raketa biti na visini 180 m iznad tla?

3) Koju će najveću visinu doseći raketa?

4) Prikaži grafički funkciju $h(t)$ i promatrajući graf opiši tijek gibanja rakete.

19. Voda

Spremnik u obliku uspravnog valjka postavljen je na horizontalnu ravninu. On sadrži 200 litara pitke vode. Na dnu spremnika je slavina kojom se spremnik može isprazniti za 20 minuta. Otvorimo li slavinu, kroz nju će teći voda te će nakon t minuta u spremniku preostati sljedeća količina:

$V(t) = 200 \cdot \left(1 - \frac{t}{20}\right)^2$, $0 \leqslant t \leqslant 20$.

1) Koliko vode će biti u spremniku nakon 10 minuta?

2) Nakon koliko vremena će u spremniku biti 100 litara vode?

3) Prikaži grafički funkciju $V(t)$ i opiši riječima funkciju $V(t)$.

Zadatci 3.5.

1. Odredi sjecišta pravca $y = -\frac{1}{4}x + 2$ i parabole $y = \frac{1}{4}x^2 - 1$. Riješi zadatak i grafički.

2. Odredi sjecišta pravca $y = x - 1$ i parabole $y = x^2 - 4x + 3$.

3. Odredi sjecišta pravca $y = -2x - 4$ i parabole $y = -x^2 + 2x + 8$.

4. Odredi sjecište pravca $y = 2x - 3$ i parabole $y = x^2 - 3x + 3$.

5. Odredi jednadžbu tangente parabole $y = x^2 - x + 3$ koja je paralelna s pravcem $y = 2x - 1$. Koja je točka dirålište te tangente i parabole?

6. Tangenta na parabolu $y = x^2 + 2x$ paralelna je s pravcem $y = -2x + 11$. U kojoj točki tangenta dira parabolu?

7. Za koje su vrijednosti brojeva p i q pravci $y = 5x + 1$ i $y = -x - 2$ tangente parabole $y = x^2 + px + q$?

8. Paralelni pravci $y = 2x + b$ sijeku parabolu $y = x^2 - 4x$ u točkama (x_1, y_1) i (x_2, y_2).

1) Za kakav je koeficijent b ta tvrdnja istinita?

2) Neka je (x', y') polovište dužine s krajevima u točkama (x_1, y_1), (x_2, y_2). Gdje leže sve te točke?

9. Odredi jednadžbu pravca koji prolazi kroz ishodište, a dira parabolu $y = x^2 - 6x + 1$.

10. Kako glase jednadžbe tangenata položenih na parabolu $y = x^2 - 3x$ u njezinim nul-točkama?

11. Kako glasi jednadžba tangente položene na parabolu $y = x^2 + x - 3$ u njezinom sjecištu s osi y?

12. Pravac prolazi ishodištem koordinatnog sustava i dira parabolu $y = -x^2 + 3x - 2$. Koliki je koeficijent smjera tog pravca?

13. Kako glasi jednadžba tangente na parabolu $y = -x^2 + x + 3$ u njezinoj točki $T = (-1, y)$?

14. Odredi jednadžbu tangente na parabolu $y = 2x^2 - x + 1$ u njezinoj točki $T = (-1, y)$.

TOČNO-NETOČNO PITALICE

Koje su od sljedećih tvrdnji točne, a koje netočne? Odgovori, a odgovor obrazloži.

1. Skup svih vrijednosti funkcije
$$f(x) = ax^2 + bx + c$$
za $a > 0$ je interval $\left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right\rangle$.

2. Tjeme parabole $y = -3x^2 - 2x + 1$ pripada pravcu $3x - 3y + 4 = 0$.

3. Graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ siječe os x u točki $(0, c)$.

4. Parabola $y = x^2 - 2x + 3$ s osi apscisa nema zajedničkih točaka.

5. Graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}\left(x - 1\right)^2$ je parabola s tjemenom na osi ordinata.

6. Sve su vrijednosti funkcije $f(x) = -2x^2 + x + 1$ negativni brojevi.

7. Ako je $ac < 0$ polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$ ima realne nul-točke.

8. Sjecišta parabole $y = 3x^2 + 2x - 1$ s osi apscisa nul-točke su funkcije
$$f(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

9. Kada x naraste od -1 na 3, vrijednost funkcije $f(x) = x^2 + x - 1$ poraste od -1 na 11.

10. Ako su x_1 i x_2 nul-točke polinoma drugog stupnja, tada taj polinom prima ekstremnu vrijednost za $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

11. Rješenje sustava nejednadžbi $x^2 \leqslant 1$ i $x^2 > x$ je interval $[-1, 0\rangle$.

12. Udaljenost sjecišta parabole $y = x^2 + x + 1$ i pravca $y = -2x - 1$ je $\sqrt{5}$.

Riješi zadatke s državne mature koji su tematski vezani uz ovo poglavlje.

3. Kvadratna funkcija

Rješenja 3.1

7. 1) $f(x)=(x-2)^2-2$;
2) $f(x)=-\frac{1}{4}(x-2)^2+1$;
3) $f(x)=(x+1)^2$;
4) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2+2$.

8. 1) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-1$;
2) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+3$;
3) $f(x)=-x^2+3$;
4) $f(x)=2x^2-5$.

9. $f(x)=x^2-2$.

10. $f(x)=2(x+1)^2+1$.

11. $f(x)=-(x-2)^2+1$.

12. $a=\frac{3}{4}$.

13. $f(x)=\frac{4}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.

Rješenja 3.2

2. 1) $f(x)=-2x^2+x+1$; 2) $f(x)=x^2-3x$;
3) $f(x)=\frac{5}{12}x^2-\frac{9}{4}x+\frac{5}{6}$.

4. 1) $y=x^2-x-2$; 2) $y=-x^2-x+2$;
3) $y=x^2+x-2$.

5. $y=-\frac{1}{3}x^2+x$.

6. 1) Za $x_0=-\frac{1}{2}$ funkcija prima najmanju vrijednost $y_0=f(x_0)=-\frac{13}{4}$.
2) Za $x_0=-\frac{1}{2}$ funkcija prima najveću vrijednost $y_0=f(x_0)=\frac{3}{2}$.
3) Za $x_0=-1$ funkcija prima najmanju vrijednost $y_0=f(x_0)=-\frac{7}{2}$.
4) Za $x_0=-2$ funkcija prima najveću vrijednost $y_0=f(x_0)=12$.
5) Za $x_0=\frac{1}{6}$ funkcija prima najmanju vrijednost $y_0=f(x_0)=-\frac{13}{12}$.

9. Najprije odredimo $a=\frac{3}{2}$. Najmanja vrijednost polinoma je $-\frac{5}{2}$.

10. Iz uvjeta zadatka slijedi $b=-4$ ili $b=4$. U prvom slučaju dobije se $x_0=-1$, a u drugom $x_0=1$.

11. Najprije je $x_0=-1$, a potom $f(-1)=-\frac{1}{2}+c=4$. Dakle je $c=\frac{9}{2}$.

12. $f(x)=-x^2+2x+3$.

13. $f(x)=x^2-6x+5$. Najmanja vrijednost polinoma je -4 i on je dosiže za $x=3$.

14. $f(x)=3x^2-6x+2$.

15. $a=-\frac{1}{2}$.

16. $f(x)=-x^2+x+3$.

17. $f(x)=-\frac{1}{3}x^2+\frac{5}{3}x-1$, a najveća vrijednost funkcije je $\frac{13}{12}$.

18. $y=\frac{1}{2}(x-1)^2$.

19. $y=-\frac{3}{4}(x+2)^2$.

20. $y=2(x+1)^2-2$, odnosno $y=2x^2+4x$.

21. $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$, odnosno $y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$.

22. $y=-x^2+3$.

23. 1) Koordinate tjemena parabole za odabrani k su $x_0=\frac{1}{k}$ i $y_0=\frac{k-1}{k}$. Iz ovih se jednadžbi eliminiranjem k dobije $y_0=-x_0+1$.

2) Tražena točka je točka $(0,1)$. Možemo je odrediti tako da odaberemo neke dvije parabole skupa, primjerice $y=x^2-2x+1$ $(k=1)$ i $y=-x^2-2x+1$ $(k=-1)$ i odredimo njihovo sjecište. To je točka $(0,1)$ za koju se potom lako provjeri da pripada svakoj od parabola, tj. da njezine koordinate zadovoljavaju jednadžbu $y=kx^2-2x+1$.

24. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{5}{-x^2+5x}$, te je $x_0=\frac{5}{2}$.

26. Svaka je točka pravca oblika $T=(x,x+1)$. Tako je $|AT|^2=(x-3)^2+(x+1)^2=2x^2-4x+10$. Udaljenost $|AT|$ je najkraća za točku $T=(1,2)$.

27. Za neku točku $T=(x,0)$ na osi apscisa je zbroj kvadrata njezinih udaljenosti od točaka A i B jednak

$$|AT|^2+|BT|^2=2x^2-20x+88.$$

Taj će zbroj biti najmanji za točku $T=(5,0)$.

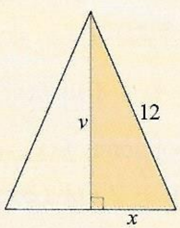
28. 1) $c^2=a^2+(10-a)^2=2(a^2-10a+50)$, a najkraću hipotenuzu ima jednakokračan trokut.

2) Rezultat je isti kao pod 1). $P=\frac{1}{2}a(10-a)=\frac{1}{2}(-a^2+10a)$, $a_0=5$.

29. Vrh pravokutnika koji leži na pravcu je točka $(3,\frac{3}{2})$.

30. $P=ab=a\cdot(4-a)=-a^2+4a$. Najveću vrijednost P prima za $a=2$. No tada je i $b=2$ te zaključujemo da od svih pravokutnika danog opsega najveću površinu ima kvadrat.

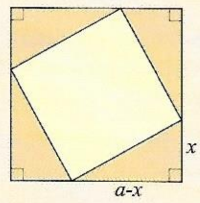
31. $P=x\cdot v=x\cdot\sqrt{144-x^2}=\sqrt{-x^4+144x^2}$ (slika), te je površina P najveća kada je $x^2=72$, odnosno kada je $x=6\sqrt{2}$. Tada je trokut jednakokračan pravokutni trokut.



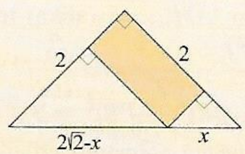
32. Najveću površinu ima kvadrat.

33. Označimo stranicu danog kvadrata sa a (slika). Upisani će kvadrat imati najmanju površinu kada zbroj površina četiriju iscrtanih sukladnih pravokutnih trokuta bude najveća. Ta je površina jednaka $P=4\cdot\frac{1}{2}(a-x)\cdot x=2(-x^2+ax)$ i ona prima najveću vrijednost za $x=\frac{a}{2}$.

Najmanju površinu ima kvadrat kojemu su vrhovi polovišta stranica danog kvadrata.



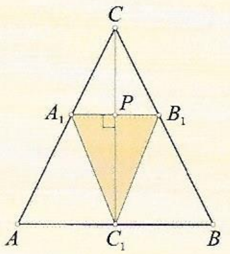
34. Površina pravokutnika jednaka je $P=2-\frac{x^2}{4}-\frac{1}{4}(2\sqrt{2}-x)^2=-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x$. Ova funkcija najveću vrijednost prima za $x=\sqrt{2}$. Tada je upisani pravokutnik kvadrat.

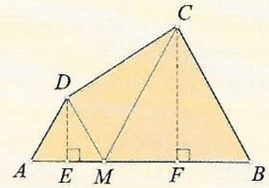


35. Najveću površinu ima pravokutnik sa stranicama duljina $\frac{a}{2}$ i $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

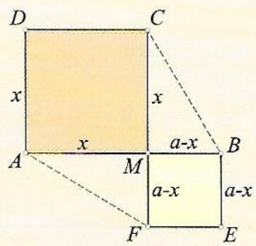
36. Stranice pravokutnika najveće površine imaju duljine $\frac{a}{2}$ i $\frac{v}{2}$.

37. Duljina visine trokuta ABC iznosi 40 cm. Iz sličnosti trokuta AC_1C i A_1PC (slika) imamo $9:40=\frac{1}{2}|A_1B_1|:(40-|C_1P|)$. Ako označimo $|A_1B_1|=x$, $|C_1P|=y$, onda je $P=\frac{1}{2}xy=-\frac{9}{40}y^2+9y$. Ova funkcija prima najveću vrijednost za $y=20$ $(x=9)$.

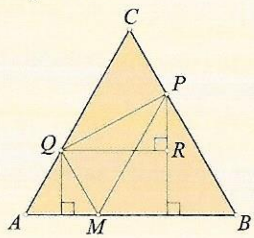




38. Površina šesterokuta (slika) jednaka je zbroju površina dvaju trapeza $AFCD$ i $CFEB$: $P = x^2 - ax + a^2$, gdje je $|AM| = x$. Površina je najmanja ako je $x = \frac{a}{2}$, tj. ako je M polovište dužine $\overline{AB}$.



39. Označimo $|AM| = x$ (slika) te je tada $|PR| = \frac{(a-x)\sqrt{3}}{2} - \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} - x\sqrt{3}$. Nadalje je: $|PQ|^2 = |QR|^2 + |PR|^2 = 3x^2 - 3ax + a^2$. Ta funkcija prima najmanju vrijednost za $x = \frac{a}{2}$. Tada je $\overline{PQ}$ srednjica trokuta.



40. Površina četverokuta jednaka je zbroju površina trokuta AED i FBC te trapeza $EFCD$ (slika). Uz oznaku $|AM| = x$ dobit ćemo $P = \frac{\sqrt{3}}{4}(x^2 - ax + a^2)$. Ova funkcija prima najmanju vrijednost za $x = \frac{a}{2}$. Tada je M polovište dužine, a četverokut $ABCD$ je jednakokračan trapez.

Rješenja 3.3

1. **1)** $x_1 = -1$, $x_2 = 2$, za $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2}$, najveća je vrijednost funkcije jednaka $y_0 = \frac{9}{4}$.

2) $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$, najmanja je vrijednost funkcije jednaka $y_0 = 0$ za $x_0 = \frac{1}{2}$.

3) Polinom nema realnih nul-točaka, a za $x_0 = \frac{1}{4}$ prima najmanju vrijednost $y_0 = \frac{7}{8}$.

4) $x_1 = -4$, $x_2 = -2$, najmanju vrijednost $y_0 = -\frac{1}{4}$ funkcija prima za $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = -3$.

5) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, funkcija najveću vrijednost $y_0 = 2$ prima za $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = 1$.

6) $x_1 = -1 + \sqrt{2}$, $x_2 = -1 - \sqrt{2}$, najveću vrijednost $y_0 = 2$ funkcija prima za $x_0 = -1$.

2. Taj je polinom oblika $f(x) = ax^2 + c$. Iz $f(0) = 2$ slijedi $c = 2$ pa je $f(x) = ax^2 + 2$. Potom iz $f(-4) = -6$ nalazimo $a = -\frac{1}{2}$ te je $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

3. Polinom je oblika $f(x) = a(x - x_0)^2$. Iz $f(-1) = f(2)$ dobijemo $a(-1 - x_0)^2 = a(2 - x_0)^2$, a odatle $x_0 = \frac{1}{2}$.

4. $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ili $f(x) = \frac{1}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3$.

5. Riječ je o polinomu $f(x) = a(x + 10(x + 3)$. Kako je $f(0) = 2$ dobit će se $a = \frac{2}{3}$, odnosno $f(x) = \frac{2}{3}(x + 1)(x + 3)$. Najmanju vrijednost polinom prima za $x = -2$ i ona iznosi $-\frac{2}{3}$.

6. $f(x) = -x^2 - x + 2$, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

7. Polinom je oblika $f(x) = a(x - x_0)^2$. No $x_0 = -1$, a $f(0) = -2$ te se dobije $f(x) = -2(x+1)^2$, odnosno $f(x) = -2x^2 - 4x - 2$.

8. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$, $x_1 = -2$, $x_2 = 4$.

9. Iz $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ dobije se $x_2 = -5$.

10. $f(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{8}{3}$.

11. $y = -\frac{3}{4}(x^2 - 3x - 4)$.

12. $y = 3(x-3)^2$.

13. $y = -\frac{4}{25}(x^2 - 6x - 16)$.

14. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x - \frac{3}{2}$.

15. $y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x$.

16. $f(x) = -\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$.

17. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x - 2 = -\frac{1}{2}(x+2)^2$.

18. **1)** $h(10) = 250$ m.

2) Iz jednadžbe $-5t^2 + 75t = 180$ slijedi $t = 12$ s ili $t = 17$ s. Naime, nakon 12 sekundi raketa se popne na visinu 180 m. Nakon toga se nastavi penjati do najviše točke i onda se pri padu još jednom nađe na visini od 180 m.

3) Najveća visina koju dosegne raketa je 281.25 m.

19. **1)** $V(10) = 50$ litara; **2)** 5.86 s.

Rješenja 3.4

2. $f(x) > 0$ za $x \in \emptyset$; $g(x) > 0$ za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$; $h(x) > 0$ za $x \in \mathbb{R} \setminus \{5.5\}$.

3. **1)** $x \in [-2, 3]$;

2) $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$;

3) $x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right\rangle$;

4) $x \in \langle 0, 2\rangle$; **5)** $x \in \left\langle -\frac{1}{3}, 1\right\rangle$;

6) $x \in \left\langle -\infty, \frac{2}{3}\right\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$;

7) $x \in \left[\frac{1}{2}, 3\right]$;

8) nejednadžba nema rješenja;

9) $x = -2$ (jedino rješenje);

10) $x \in \langle 0, 1\rangle$.

4. **1)** $|p| \geqslant 4\sqrt{2}$;

2) $p \in \langle -\infty, 0] \cup [8, +\infty\rangle$;

3) $p \in \left[-\frac{4}{3}, 0\right]$, $p \neq 1$;

4) $p \in \langle -\infty, -10 - 4\sqrt{6}] \cup [-10 + 4\sqrt{6}, +\infty\rangle$.

6. Iz uvjeta $D \geqslant 0$ slijedi $5a^2 - 6a + 1 \geqslant 0$, a odatle $a \leqslant \frac{1}{5}$ ili $a \geqslant 1$.

7. Iz uvjeta $D \leqslant 0$ slijedi $m^2 - 12m + 20 < 0$, a odatle $2 < m < 10$.

8. Diskriminanta ove kvadratne jednadžbe jednaka je $(k-2)^2$. Zaključujemo da jednadžba ima realna rješenja za svaki k, uz to su za $k = 2$ ta rješenja jednaka.

9. $-1 \leqslant k \leqslant \frac{1}{3}$.

10. $x \in [-3, -1]$.

11. $x \in \emptyset$.

12. $x \in [-3, 0]$.

13. **1)** $x \in \langle -\infty, -2\rangle \cup [1, +\infty\rangle$; **2)** $x \in \left\langle 0, \frac{3}{2}\right\rangle$;

3) $x \in \left[-1, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, 1\right]$; **4)** $x \in \langle 0, 2]$;

5) $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$; **6)** $x \in [1, 2]$.

14. **1)** $x \in \langle -3, 3\rangle$; **2)** $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right\rangle$;

3) $x \in \langle -\infty, -2] \cup \langle 1, +\infty\rangle$;

4) $x \in \langle -\infty, 0] \cup \left\langle \frac{1}{3}, +\infty\right\rangle$.

15. **1)** $x \in \langle 0, 2\rangle$, $x \neq 1$;

2) $x \in \langle 0, 2\rangle$;

3) $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup [0, 2\rangle \cup [4, +\infty\rangle$;

4) $x \in \langle -\infty, -1] \cup [0, 1\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$;

5) $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle \cup \left\{\frac{1}{2}\right\}$;

6) $x \in \langle -\infty, -2] \cup [-1, +\infty\rangle$.

16. **1)** $x \in [-5, -4\rangle \cup \langle -2, -2 + \sqrt{3}]$;

2) $x \in [-1 - 2\sqrt{2}, -3\rangle \cup \langle 1, 3]$.

17. $m \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle$.

18. Kako je $D = 4(3m^2 + 2m + 3) > 0$ za svaki $m \in \mathbb{R}$, dani polinom uvijek ima realne nultočke. Zato ni za koje m polinom ne može primati samo pozitivne vrijednosti.

19. Iz sustava uvjeta $k-2<0$ i $D=25-4k^2<0$ imamo $k<-\frac{5}{2}$.

20. Iz sustava uvjeta $2m+1>0$ i $D=-4m^2+1<0$ dobije se $m>\frac{1}{2}$.

21. $a=5$.

22. Nema rješenja.

23. $a\in\left\langle\frac{2-\sqrt{3}}{2},\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right\rangle$.

Rješenja 3.5

1. Sjecišta su točke $S_1(-4,3)$ i $S_2\left(3,\frac{5}{4}\right)$.

2. Sjecišta su točke $A=(1,0)$ i $B=(4,3)$.

3. $A=(-2,0)$, $B=(6,-16)$.

4. $A(2,1)$, $B(3,3)$.

5. Iz sustava $y=x^2-x+3$, $y=2x+b$ dobijemo jednadžbu $x^2-3x-b+3=0$. Uvjet $D=0$ daje $b=\frac{3}{4}$ te je tangenta pravac $y=2x+\frac{3}{4}$. Diralište je točka $D\left(\frac{3}{2},\frac{15}{4}\right)$.

6. $y=-2x-4$, diralište je točka $(-2,0)$.

7. Diskriminante obiju jednadžbi $x^2+(p-5)x+q-1=0$ i $x^2+(p+1)x+q+2=0$ moraju biti jednake nuli. Odatle se dobije $p=3$, $q=2$.

8. **1)** $b>-9$; **2)** na pravcu $x=3$.

9. $y=-8x$, $y=-4x$.

10. Nul-točke parabole su $x_1=0$ i $x_2=3$. Tangente u nul-točkama na parabolu su pravci $y=-3x$ i $y=3x-9$.

11. $y=x-3$.

12. $k=3+2\sqrt{2}$ ili $k=3-2\sqrt{2}$.

13. Sa $y=ax+a+1$ dan je skup pravaca točkom $T=(-1,1)$. Sjecišta tih pravaca i dane parabole rješenja su jednadžbe $x^2+(a-1)x+a-2=0$. Za $D=0$ ta će jednadžba imati jedno (dvostruko) rješenje i ono je koeficijent smjera tangente. Iz $D=0$ slijedi $a=3$ te je tangenta pravac $y=3x+4$.

14. $y=-5x-1$.