MATEMATIKA

Geometrija ravnine

Geometrija ravnine

Knjiga „*Matematika za IT*”

- Poglavlje „Geometrija ravnine”, str. 174. – 195.

Geometrija ravnine

Linearna algebra nam omogućava velik broj manipulacija objektima u ravnini.

Jedna od primjena tih mogućnosti jest – računalna grafika.

Linearna algebra nam omogućava transformacije podataka koje računalo prikazuje na ekranu, čime kreiramo različite vizualne efekte, poput zrcaljenja, rotiranja ili rastezanja različitih objekata u ravnini.

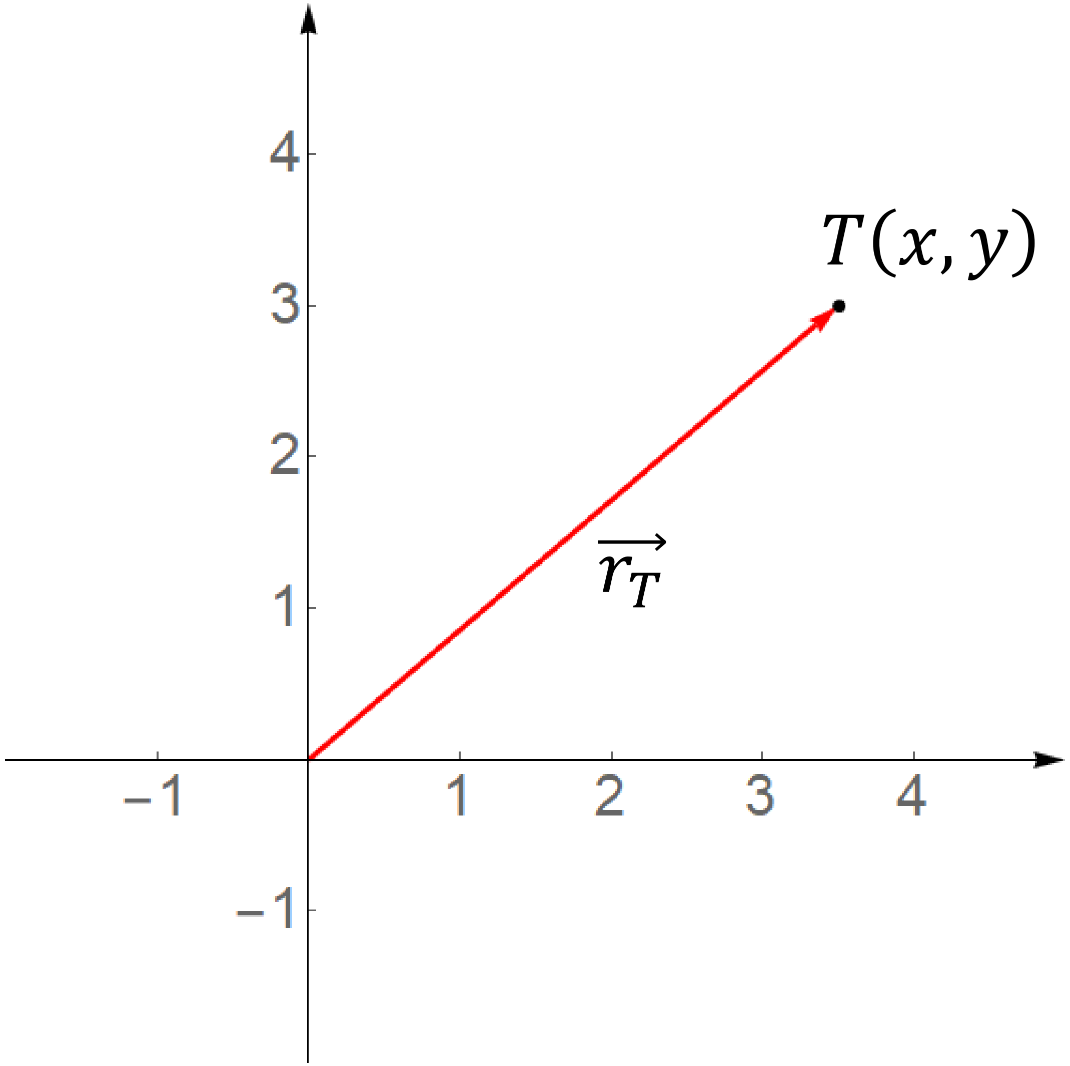
No, prvo su nam potrebne definicije objekata u ravnini na kojima možemo upotrijebiti mehanizme iz linearne algebre.

Točka u ravnini

Točka se u ravnini prikazuje pomoću **radij vektora.**

Radij vektor je vektor kojemu je početna točka u ishodištu, a završna točka u promatranoj točki $T(x, y)$.

$$\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{OT} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$



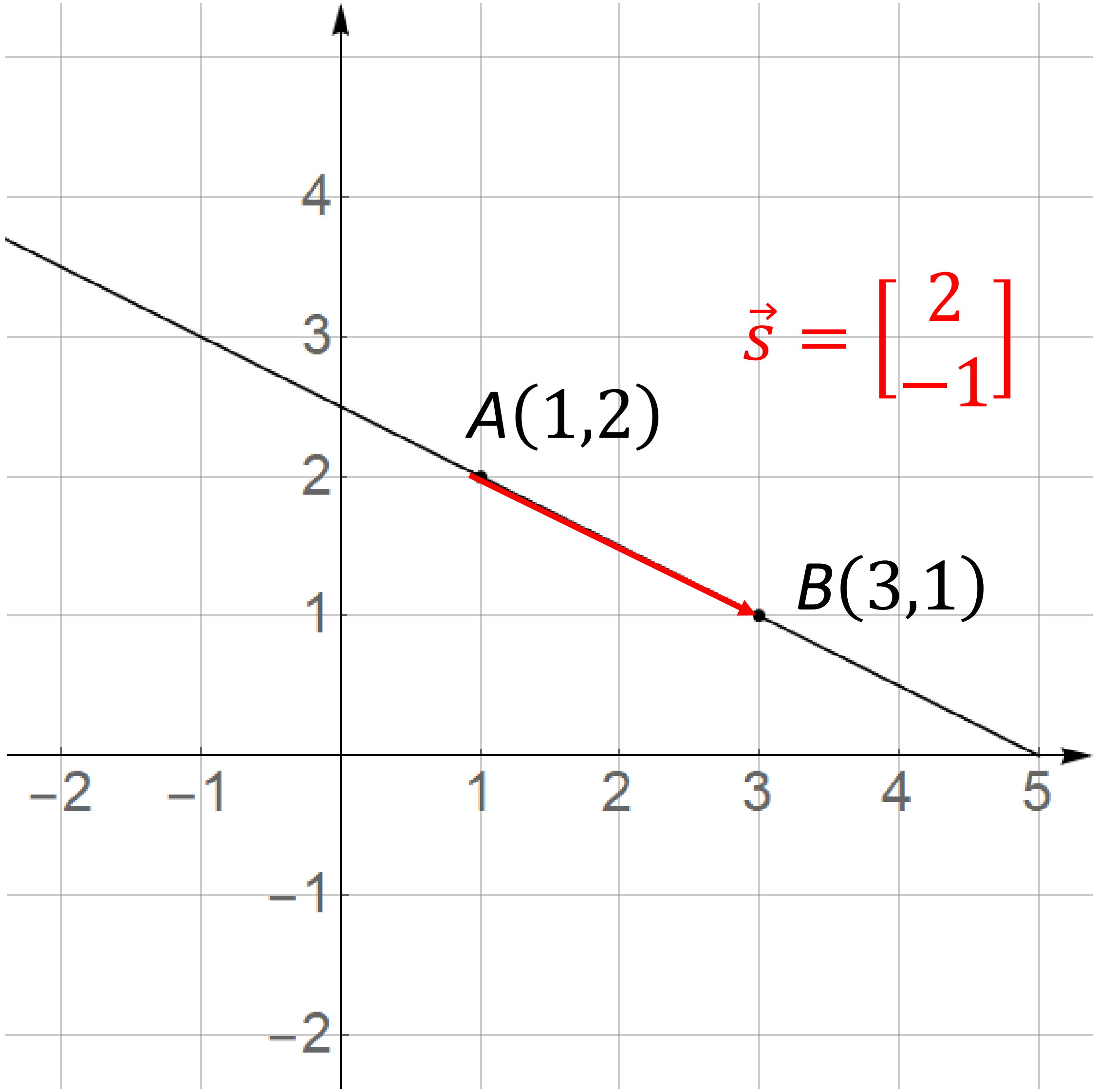
Pravac u ravnini

Pravac u ravnini prikazujemo pomoću radij vektora točaka na pravcu.

Svaki pravac ima vektor koji određuje njegov smjer.

Tih vektora je beskonačno mnogo, no nama je potreban samo jedan.

Označavamo ga s $\vec{s}$ i zovemo **vektorom smjera** pravca.

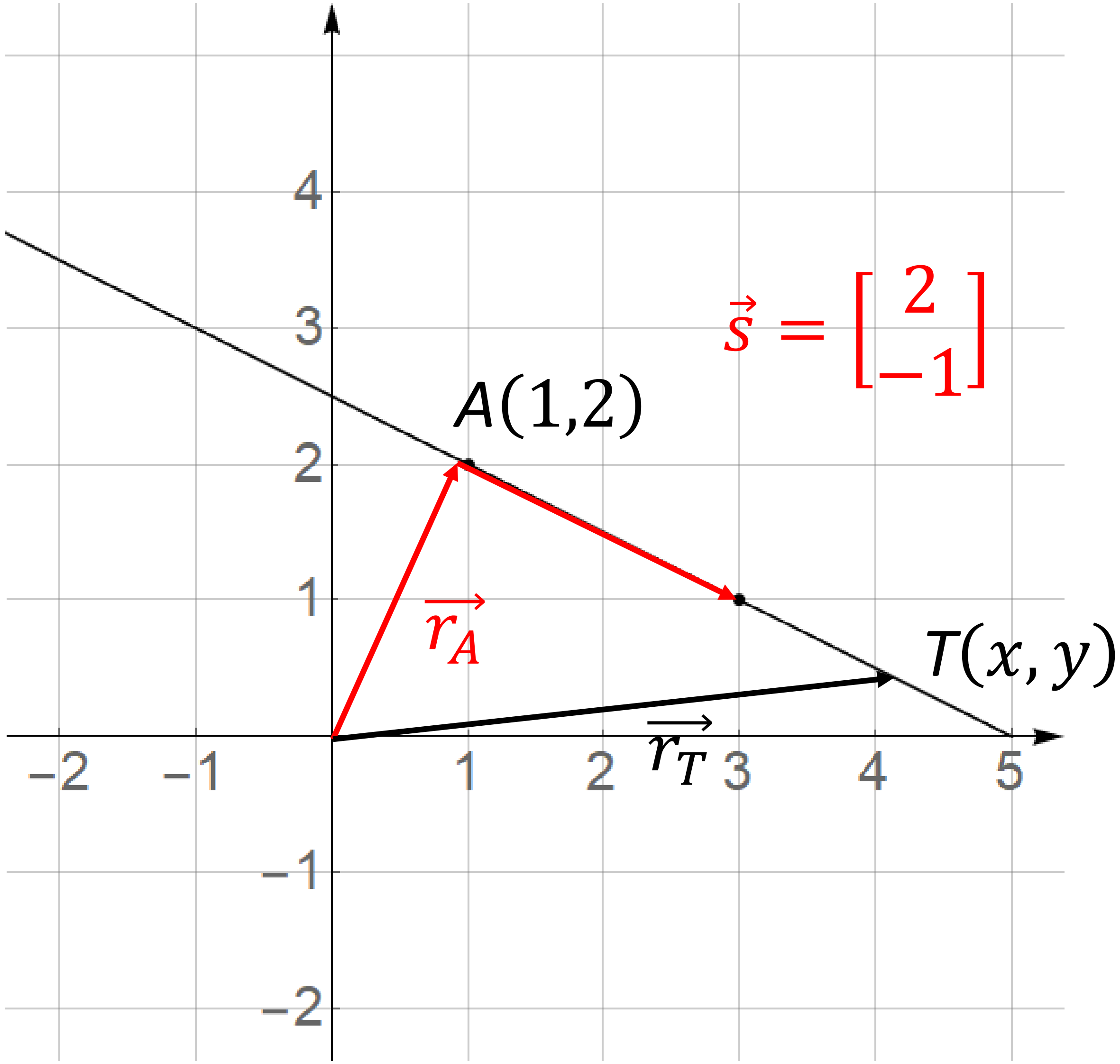


Pravac u ravnini

Pored vektora smjera potrebna nam je jedna istaknuta točka na tom pravcu, tj. njen radij vektor.

Sada se radij vektor svake točke na pravcu, $T(x, y)$, može prikazati kao zbroj radij vektora točke A i rastegnutog (ili skupljenog) vektora smjera $\vec{s}$:

$$\boxed{\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{s}}$$



Pravac u ravnini

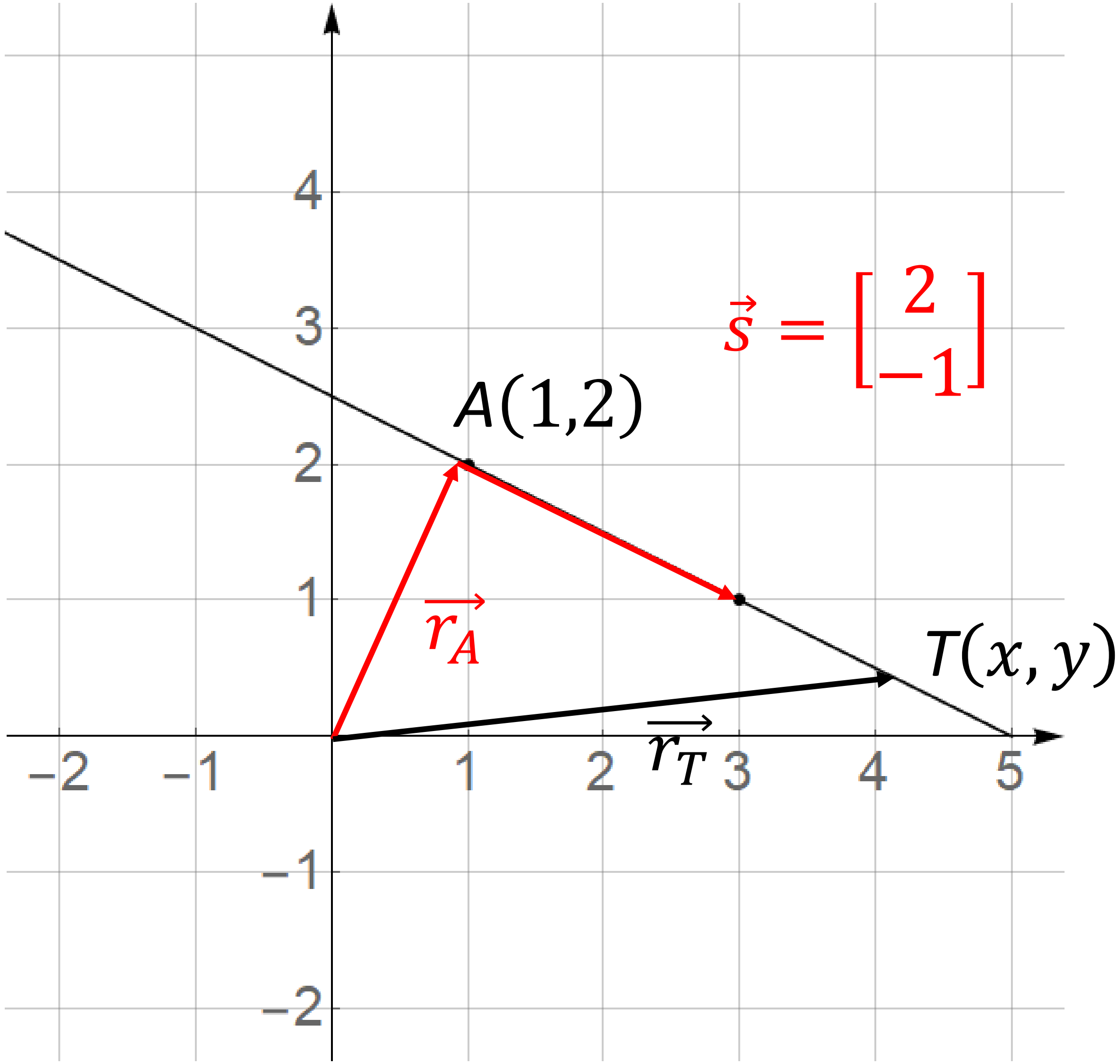
$$\boxed{\overrightarrow{r_T} = \overrightarrow{r_A} + t \cdot \vec{s}}$$

U našem primjeru ta jednadžba glasi:

$$\overrightarrow{r_T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_T} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2t \\ -t \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_T} = \begin{bmatrix} 1 + 2t \\ 2 - t \end{bmatrix}$$



Krivulje u ravnini

Slično, kao i kod pravca, svaku krivulju u ravnini predstavljamo radij vektorom točaka te krivulje.

Ako želimo prikazati graf neke funkcije $f(x)$, tada točke s grafa te funkcije možemo prikazati pomoću radij vektora

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} x \\ f(x) \end{bmatrix} = x \cdot \vec{\imath} + f(x) \cdot \vec{\jmath}$$

Istaknimo jednu krivulju koja se često koristi – kružnicu polumjera R sa središtem u ishodištu:

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} R\cos t \\ R\sin t \end{bmatrix} = R\cos t \cdot \vec{\imath} + R\sin t \cdot \vec{\jmath}, \qquad t \in [0,2\pi]$$

Takav zapis kružnice još se naziva i polarnim zapisom.

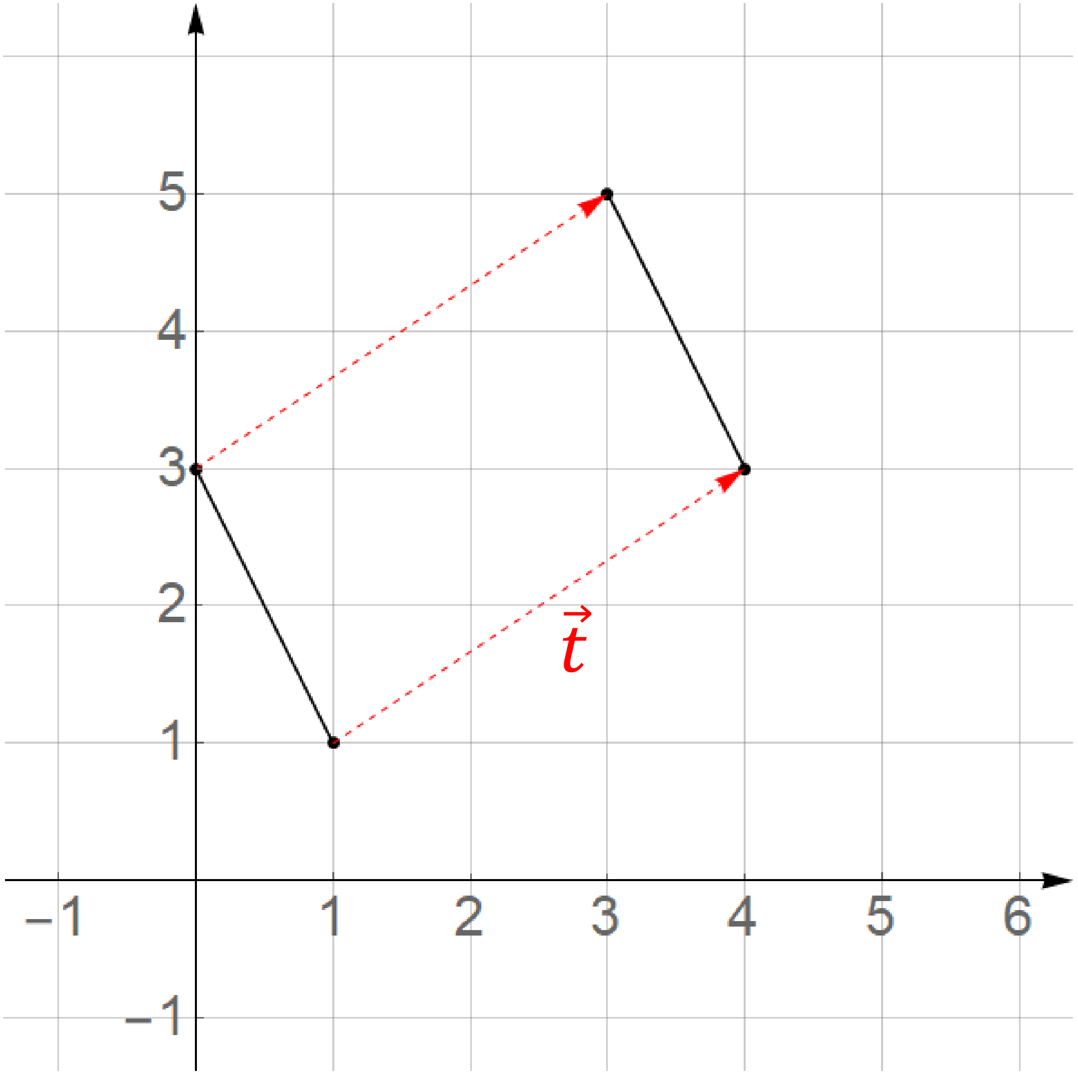
Translacija

Translacija je preslikavanje u ravnini koje svaku točku ravnine pomiče u istom smjeru za istu udaljenost.

Translacija u ravnini je funkcija $t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ koja radij vektor $\vec{r}$ preslikava u radij vektor $\vec{r}' = t(\vec{r})$ takav da vrijedi:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{t}$$

Translacija ne mijenja oblik i veličinu objekta.



Translacija

Na primjer, ako želimo dobiti vektorsku jednadžbu kružnice polumjera 3 sa središtem u točki $T(-1,2)$, tada jednadžbu kružnice polumjera 3 sa središtem u ishodištu

$$\overrightarrow{r_k} = \begin{bmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \end{bmatrix}$$

trebamo translatirati za radij vektor novog središta,

$$\overrightarrow{r_t} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_k} + \overrightarrow{r_t}$$

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 3\cos t \\ 3\sin t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{bmatrix} -1 + 3\cos t \\ 2 + 3\sin t \end{bmatrix}$$

Translacija

Translatirajte pravac $y = 1 - 2x$ tako da prolazi točkom $T(1,1)$.
Zapišite vektorsku jednadžbu novog pravca.

Zapišimo prvo pravac u vektorskom obliku.
On očigledno prolazi točkom $A(0,1)$.

Kod eksplicitne jednadžbe pravca $y = kx + l$ vektor smjera možemo uvijek zapisati u obliku $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}$.

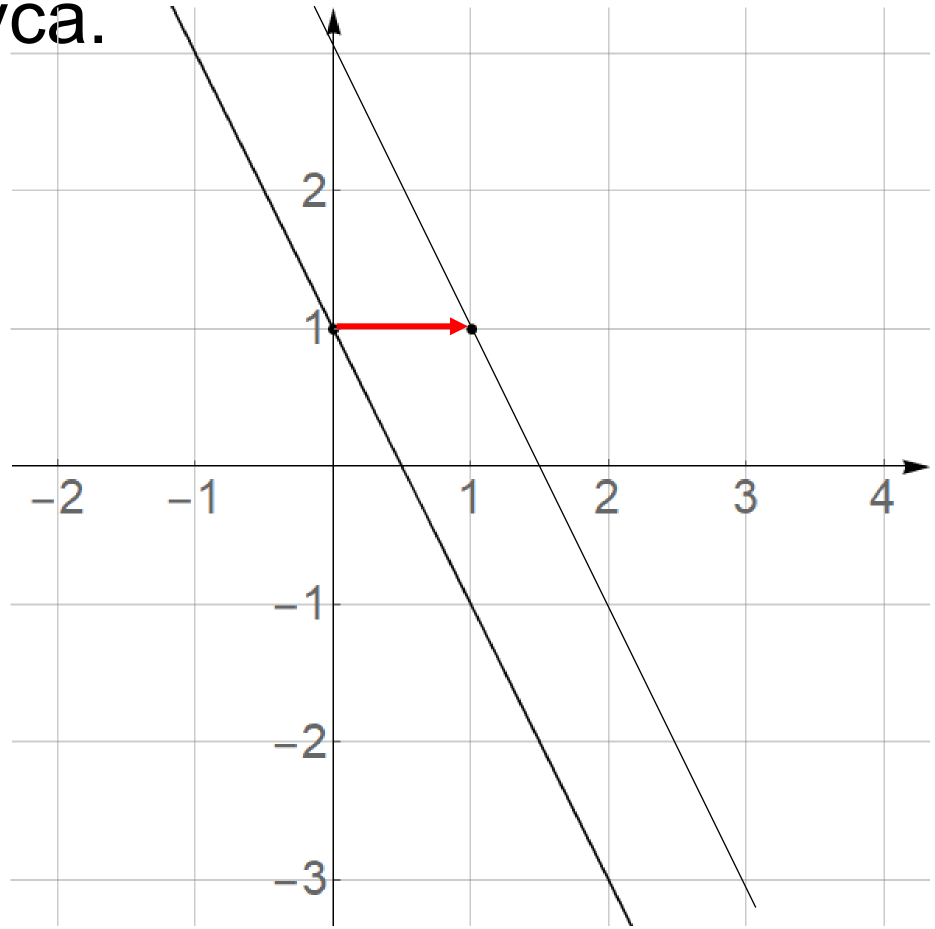
To znači da u ovom slučaju vrijedi: $\vec{s} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - 2t \end{bmatrix}$$

Translacija

Translatirajte pravac $y = 1 - 2x$ tako da prolazi točkom $T(1,1)$. Zapišite vektorsku jednadžbu novog pravca.

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} t \\ 1 - 2t \end{bmatrix}$$



Odredimo sada vektor translacije.

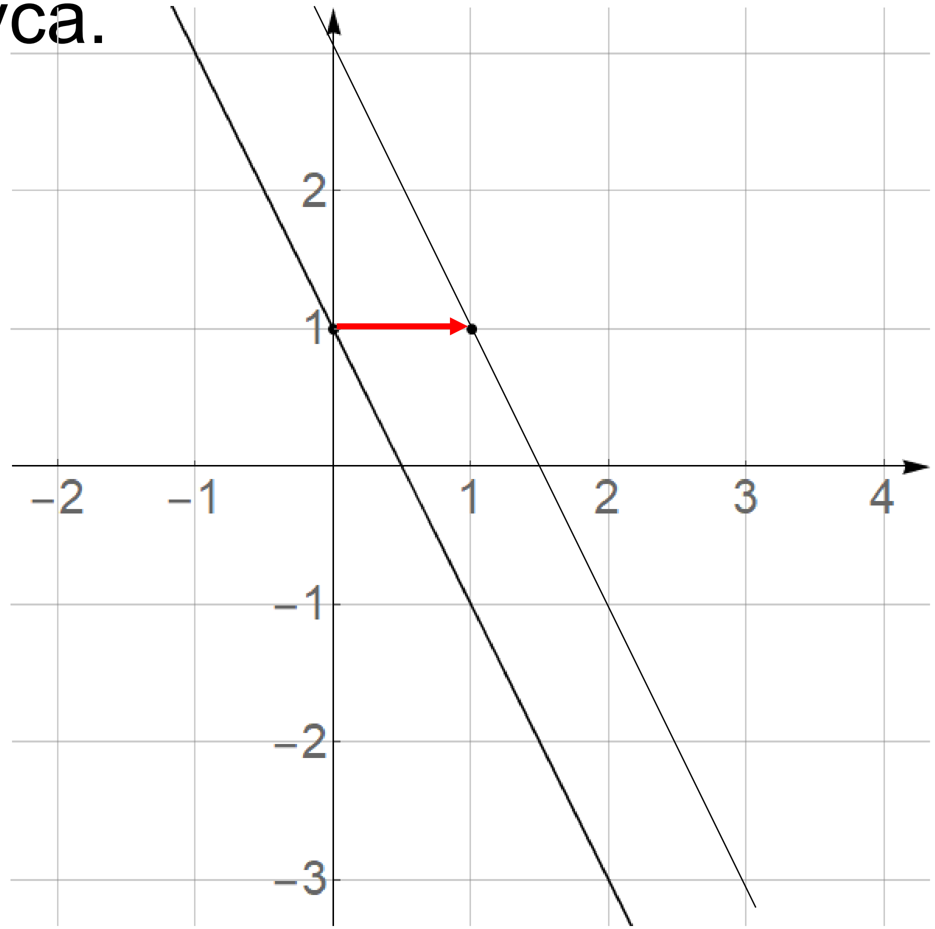
Za to nam može poslužiti bilo koji vektor koji neku točku s pravca translatira u točku $T(1,1)$.

Na primjer: $\vec{t} = \overrightarrow{AT} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

ALGEBRA

Translacija

Translatirajte pravac $y = 1 - 2x$ tako da prolazi točkom $T(1,1)$. Zapišite vektorsku jednadžbu novog pravca.



Dakle, novi pravac ima jednadžbu:

$$\vec{r}' = \vec{r} + \vec{t}$$

$$= \begin{bmatrix} t \\ 1 - 2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} t + 1 \\ 1 - 2t \end{bmatrix}$$

Osna simetrija

Osna simetrija je preslikavanje ravnine koje točku ravnine T zrcali preko nekog pravca u točku T'.

Pravac oko kojeg vršimo zrcaljenje naziva se **os simetrije**.

Pokazati ćemo kako se u ravnini vrše osne simetrije obzirom na koordinatne osi, tj. osnu simetriju obzirom na os apscisa i osnu simetriju obzirom na os ordinata.

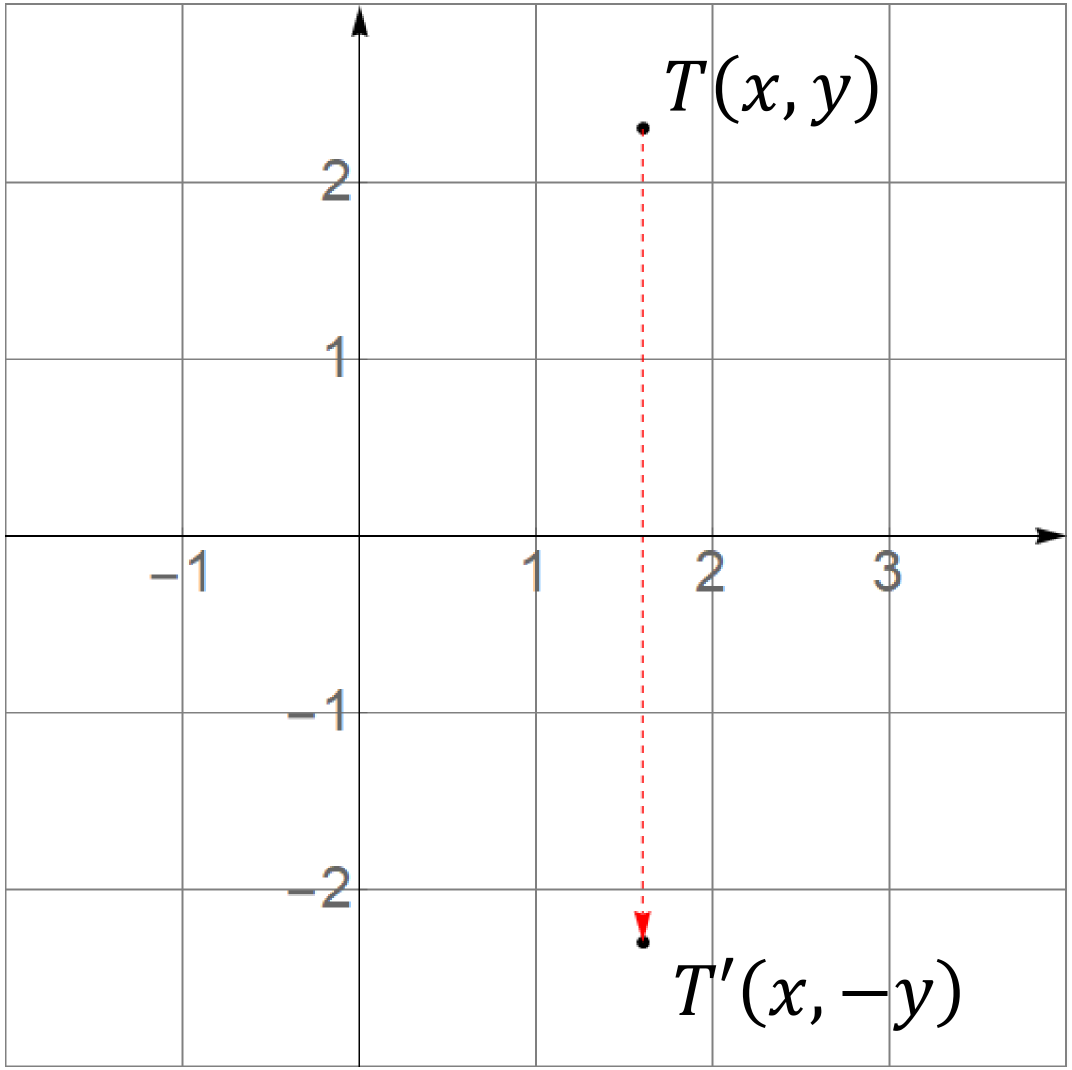
Osna simetrija

Osna simetrija oko osi apscisa (x-osi) točku $T(x, y)$ preslikava u točku $T'(x, -y)$.

Takvo preslikavanje postižemo korištenjem matrice preslikavanja:

$$O_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$O_x \cdot \overrightarrow{r_T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$



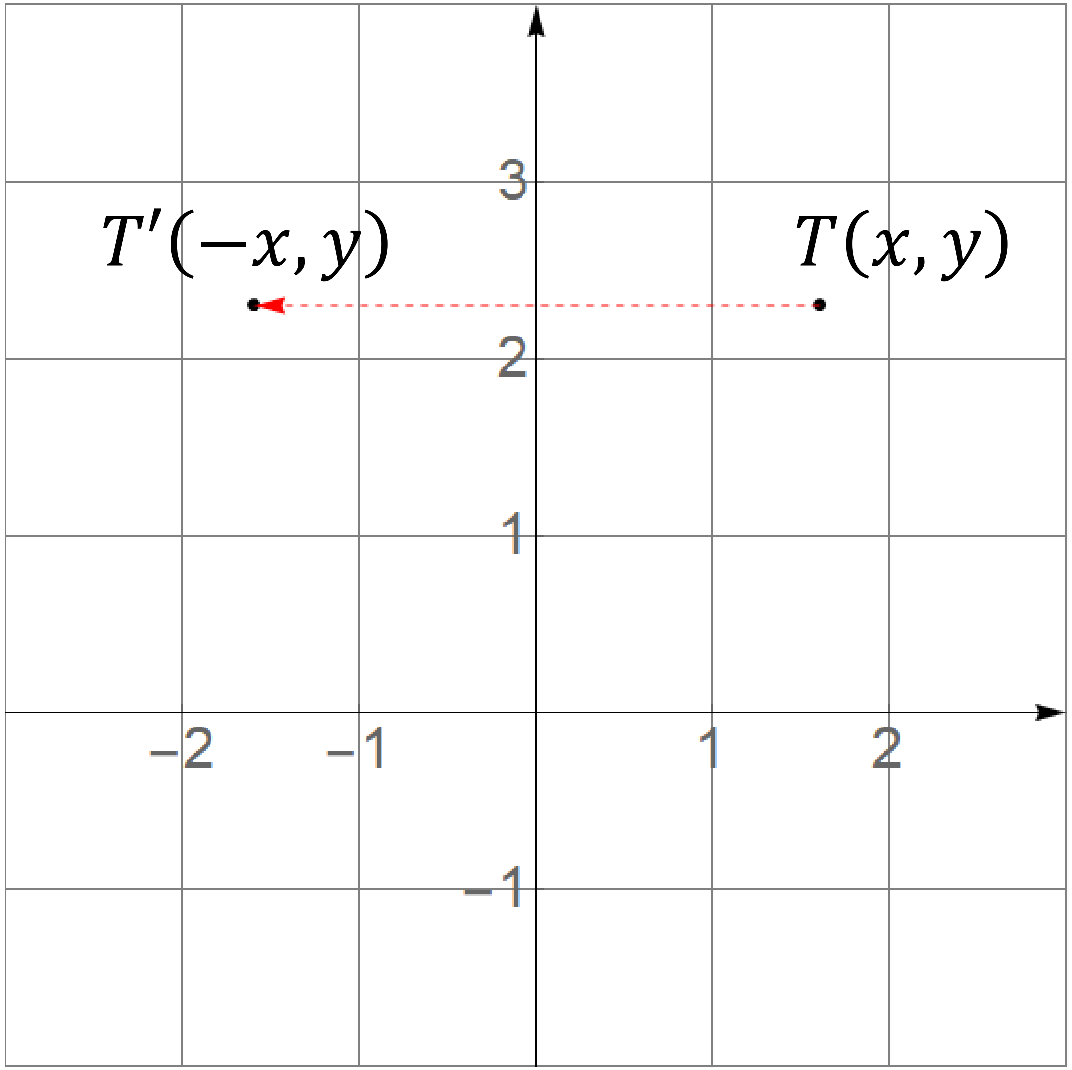
Osna simetrija

Osna simetrija oko osi ordinata (y-osi) točku $T(x, y)$ preslikava u točku $T'(-x, y)$.

Takvo preslikavanje postižemo korištenjem matrice preslikavanja:

$$O_y = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$O_y \cdot \overrightarrow{r_T} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$



Osna simetrija

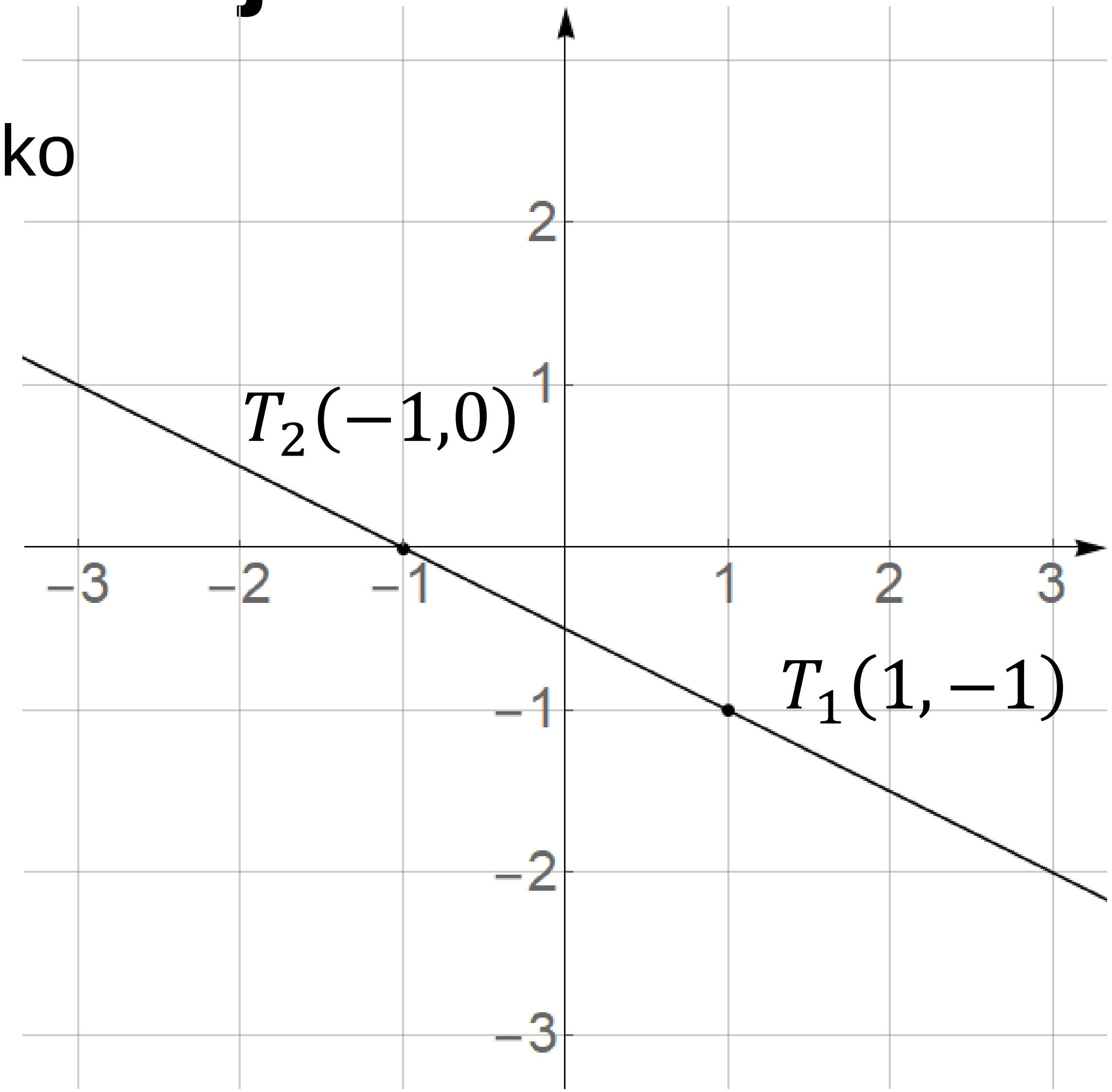
Preslikajte pravac $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ -1+t \end{bmatrix}$ preko osi ordinata.

Trebamo odrediti dvije točke na pravcu:

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{r_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{r_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Preslikati ćemo te dvije točke.

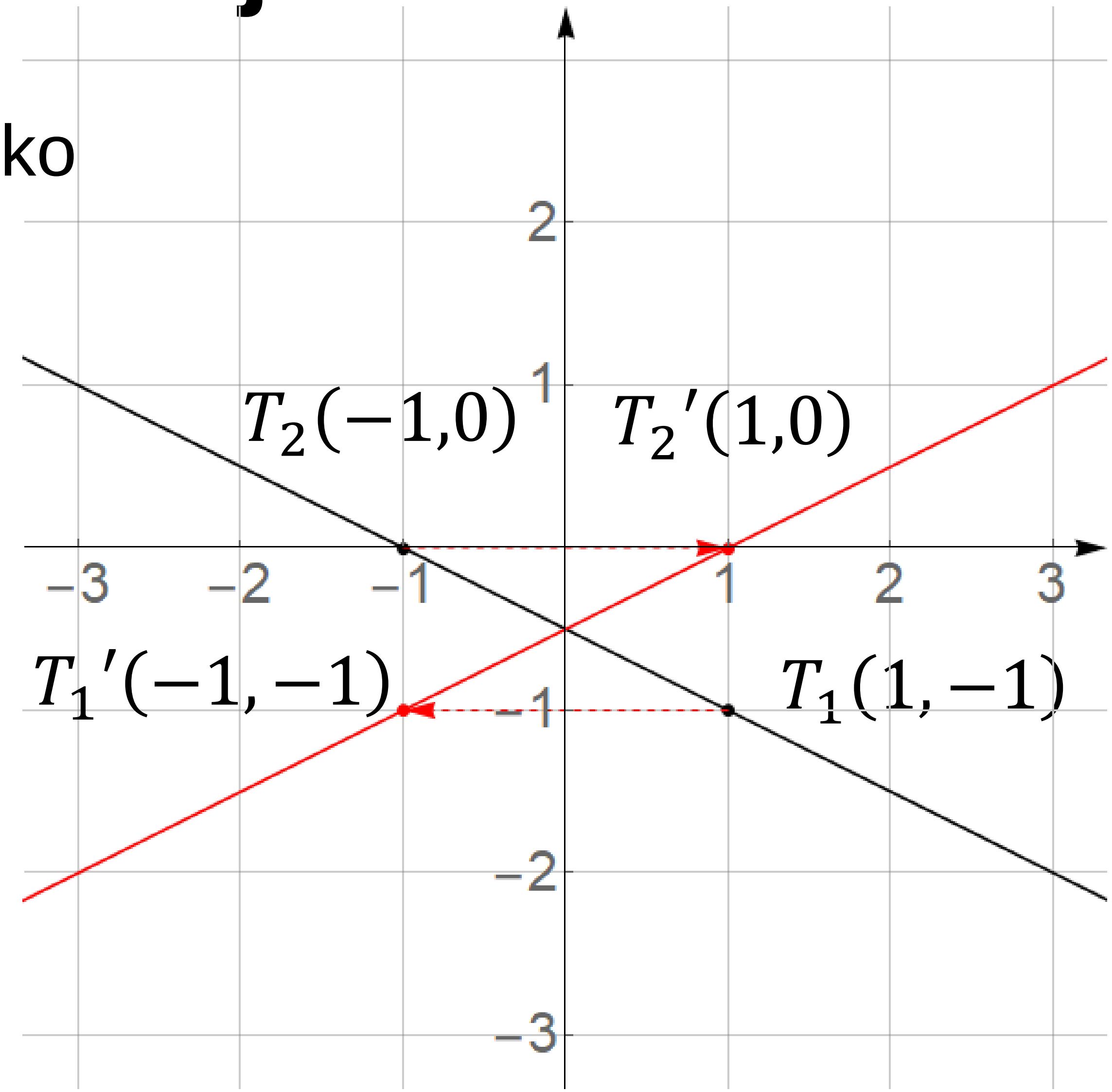


Osna simetrija

Preslikajte pravac $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ -1+t \end{bmatrix}$ preko osi ordinata.

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{r_1}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{r_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \overrightarrow{r_2}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Osna simetrija

$$\overrightarrow{r_1}' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \overrightarrow{r_2} = = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

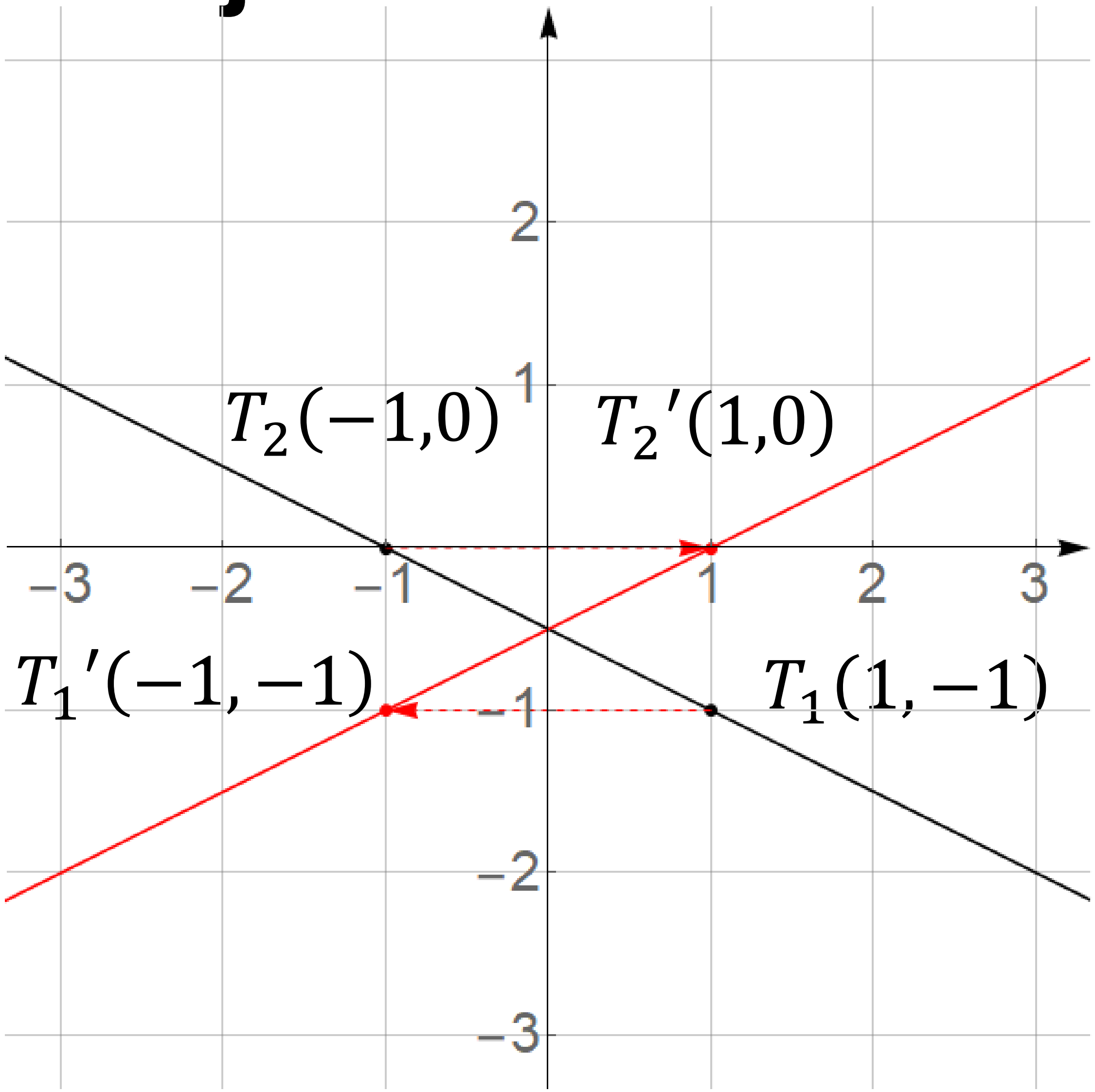
Vektor smjera novog pravca:

$$\vec{s} = \overrightarrow{T_1'T_2'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vektorska jednadžba novog pravca:

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} -1 + 2t \\ -1 + t \end{bmatrix}$$



Osna simetrija

Dakle, osnom simetrijom smo pravac

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1-2t \\ -1+t \end{bmatrix}$$

preslikali u pravac

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} -1+2t \\ -1+t \end{bmatrix}$$

Isti rezultat dobijemo primjenom matrice osne simetrije neposredno na vektorsku jednadžbu pravca:

$$\vec{r}' = S_y \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1-2t \\ -1+t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+2t \\ -1+t \end{bmatrix}$$

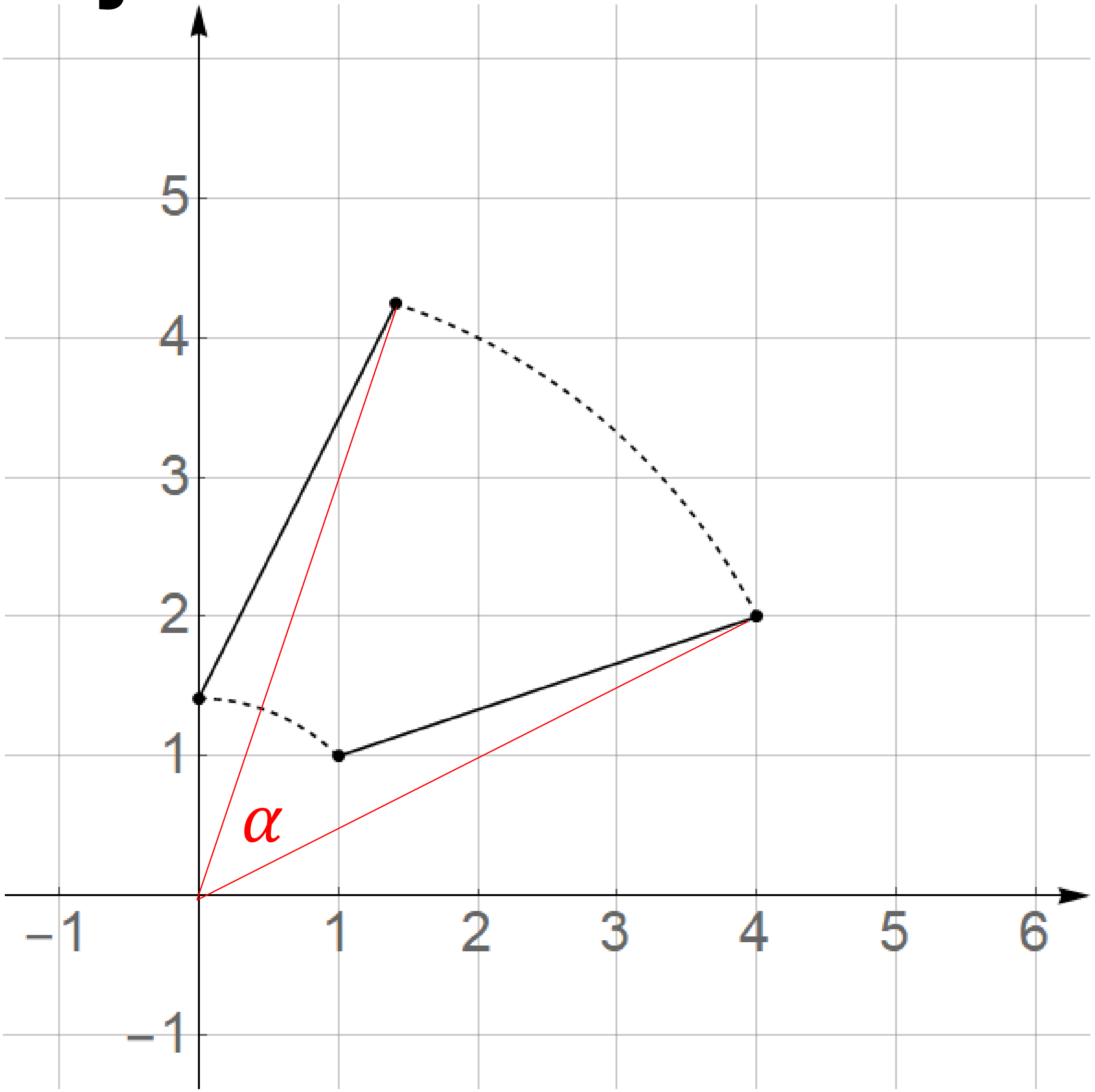
Preslikavanje ne moramo izvoditi po točkama, već možemo preslikavati vektorsku jednadžbu krivulje.

Rotacija

Rotacija oko točke O je preslikavanje ravnine koje čuva oblik i veličinu objekata u ravnini.

Rotacija točku T preslika u točku T', tako da je $|OT| = |OT'|$, te da dužine $\overline{OT}$ i $\overline{OT'}$ zatvaraju unaprijed zadani kut α.

Opisati ćemo rotaciju oko ishodišta.



Rotacija

U ravnini, operacija rotiranja oko ishodišta za kut α dana je **matricom rotacije**:

$$R = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

Pozitivan smjer rotacije je smjer suprotan kretanju kazaljke na satu.

Prisjetimo se!
Kosinus je parna funkcija: $\cos(-x) = \cos x$
Sinus je neparna funkcija: $\sin(-x) = -\sin x$

Rotacija

Nekoliko primjera matrice rotacije:

- rotacija za 45° u smjeru obrnutom od kazaljke na satu:

$$R = \begin{bmatrix} \cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

- rotacija za 30° u smjeru kazaljke na satu:

$$R = \begin{bmatrix} \cos(-30°) & -\sin(-30°) \\ \sin(-30°) & \cos(-30°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

Rotacija

Nekoliko primjera matrice rotacije:

- rotacija za $90°$ u smjeru obrnutom od kazaljke na satu:

$$R = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- rotacija za $180°$:

$$R = \begin{bmatrix} \cos 180° & -\sin 180° \\ \sin 180° & \cos 180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Rotacija za $180°$ se još naziva i centralna simetrija.

Rotacija

Dužinu $\overline{AB}$, gdje je $A\left(\sqrt{2},0\right)$, $B\left(2,\sqrt{2}\right)$, rotirajte za $45°$ u smjeru kazaljke na satu. Prikažite grafički tu rotaciju.

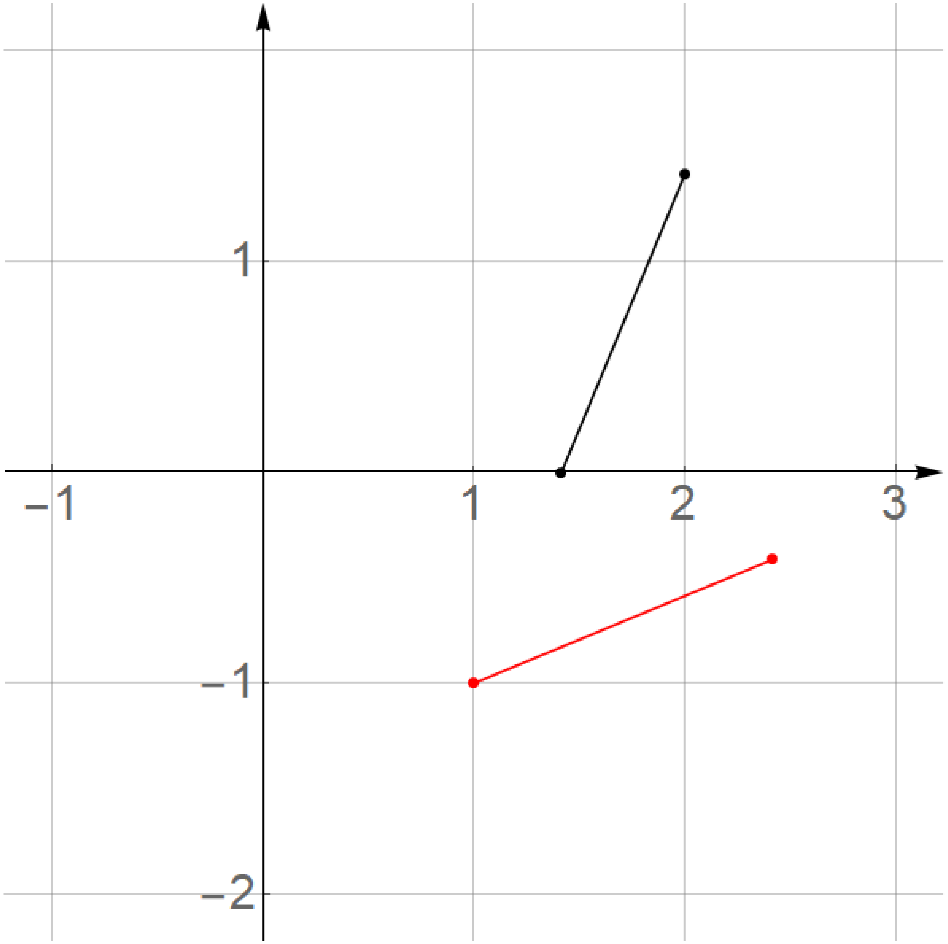
Matrica rotacije:

$$R=\begin{bmatrix}\cos(-45°) & -\sin(-45°)\\ \sin(-45°) & \cos(-45°)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$$

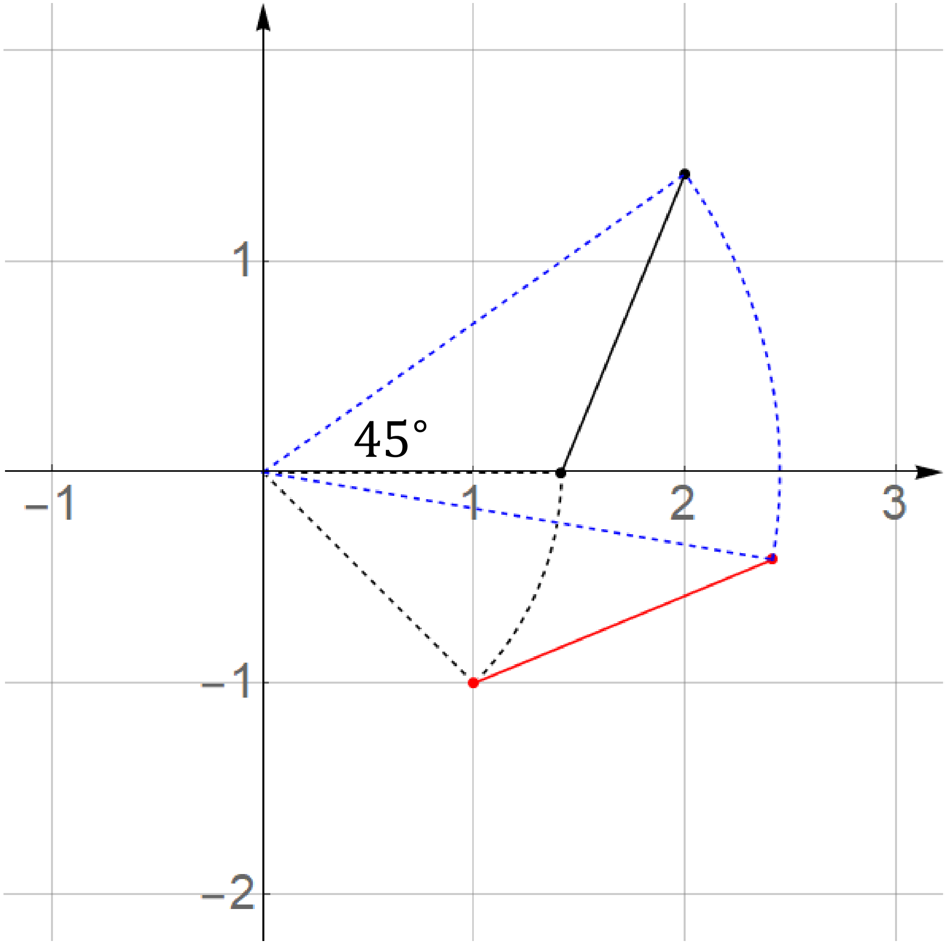
$$\overrightarrow{r_A}=\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix} \qquad \overrightarrow{r_B}=\begin{bmatrix}2\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}$$

Rotacija

$A(\sqrt{2}, 0) \rightarrow A'(1, -1)$



$B(2, \sqrt{2}) \rightarrow B'(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$



Rotacija

Pravac $\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 - t \\ -1 + 3t \end{bmatrix}$ rotirajte oko ishodišta za $90°$ u smjeru obrnutom od kazaljke na satu. Prikažite zadani i dobiveni pravac grafički.

$$R = \begin{bmatrix} \cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}' = R \cdot \vec{r} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 - t \\ -1 + 3t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3t \\ 1 - t \end{bmatrix}$$

Rotacija

$$\vec{r} = \begin{bmatrix} 1 - t \\ -1 + 3t \end{bmatrix}$$

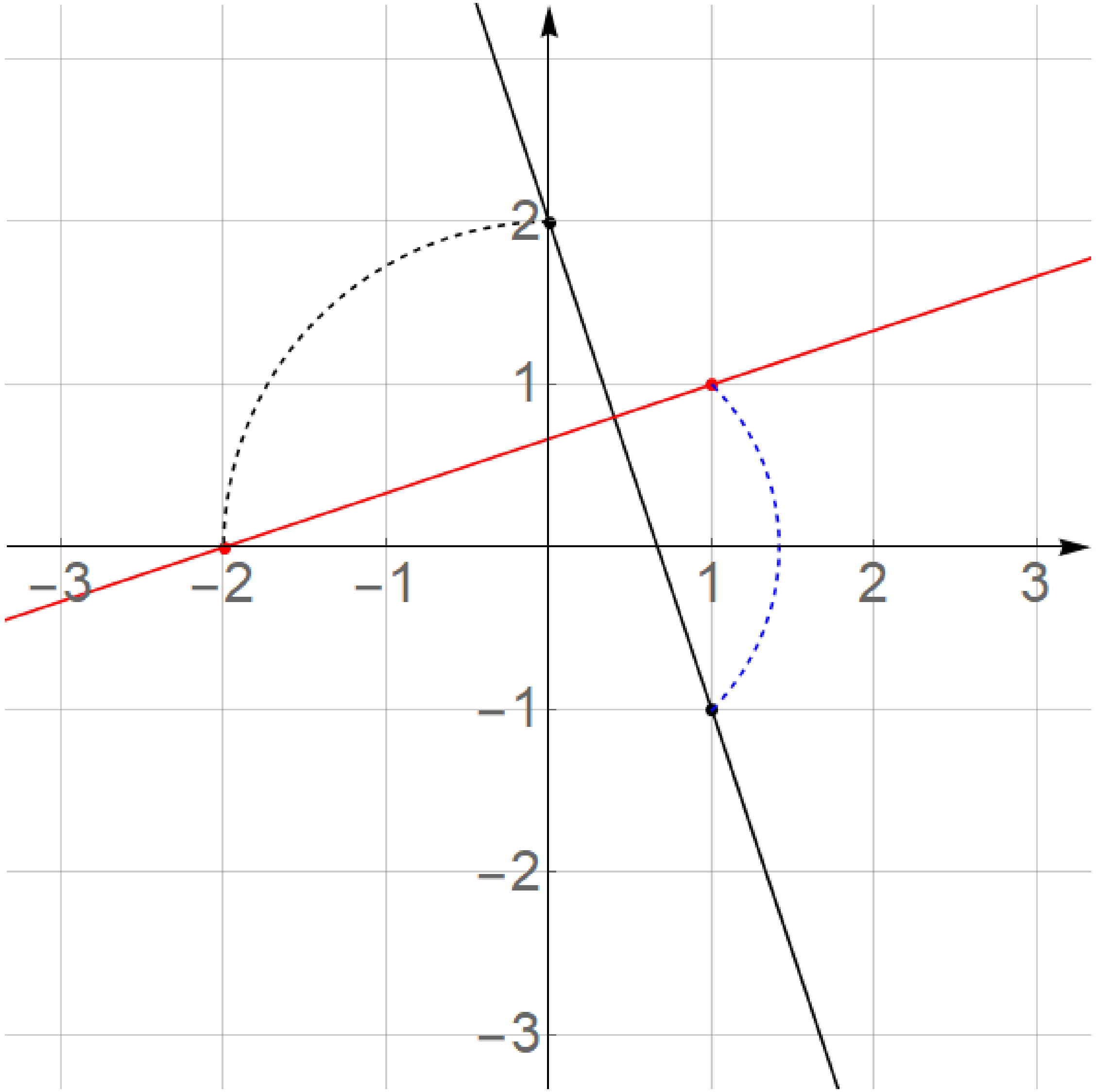
$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{r_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}' = \begin{bmatrix} 1 - 3t \\ 1 - t \end{bmatrix}$$

$$t = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r_1}' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t = 1 \quad \Rightarrow \quad \vec{r_2}' = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

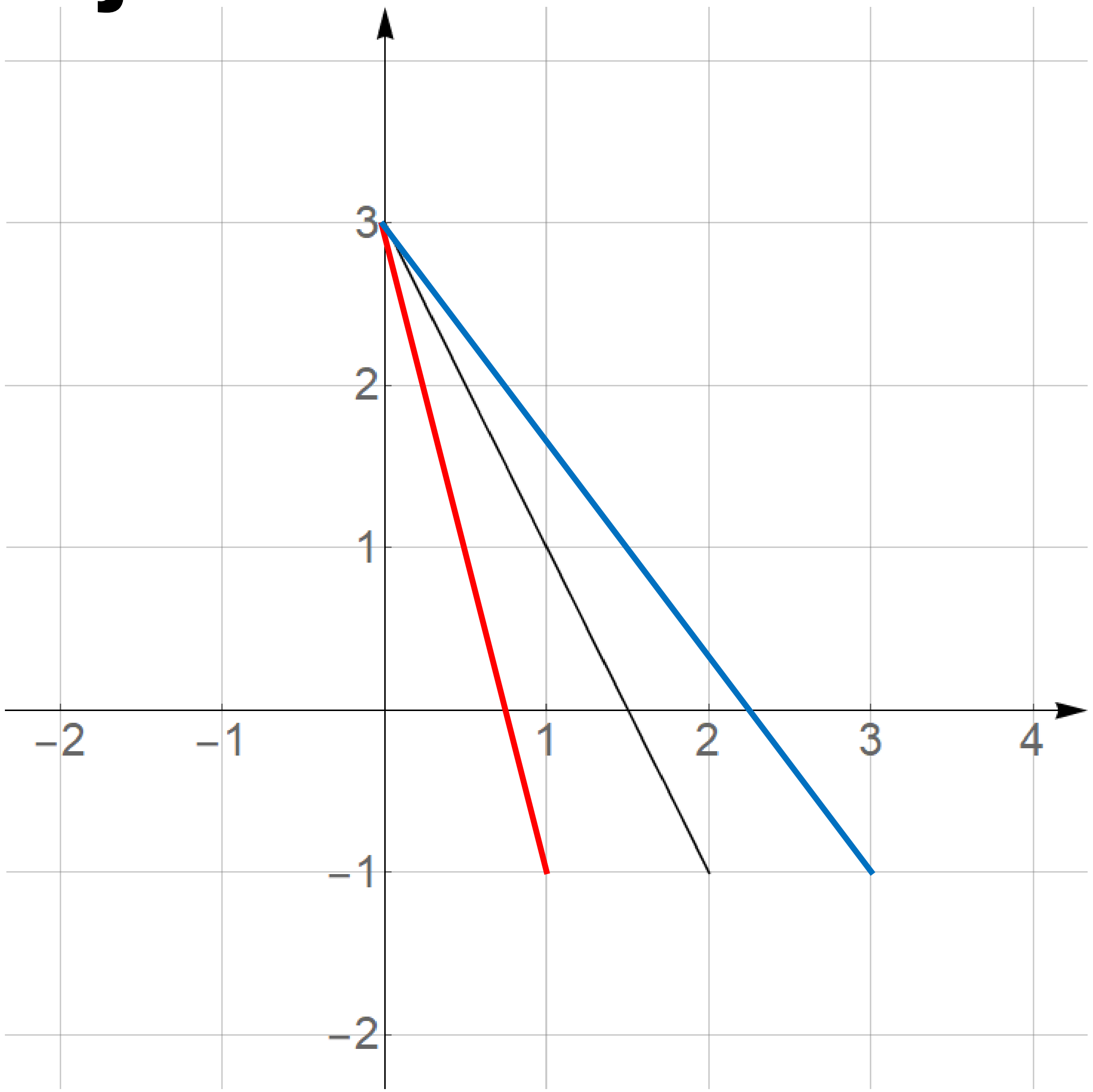


Skaliranje

Skaliranje (rastezanje i sažimanje) možemo izvoditi u smjeru osi apscisa i osi ordinata.

Pri rastezanju (sažimanju) u smjeru x-osi, x-koordinata radij vektora povećava se (smanjuje) za neki faktor k.

Na slici vidimo primjer sažimanja za faktor $k = 0.5$ i rastezanja za faktor $k = 1.5$ u smjeru x-osi.



Skaliranje

Skaliranje u smjeru x-osi postiže se upotrebom matrice skaliranja

$$S_x = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemu se radi o rastezanju ukoliko je $k > 1$, te o sažimanju za $0 < k < 1$.

Skaliranje u smjeru y-osi postiže se upotrebom matrice skaliranja

$$S_y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}.$$

Rastezanje i sažimanje

Ukoliko objekte u ravnini želimo skalirati duž x-osi za faktor k_x, i skalirati duž y-osi za faktor k_y, tada primjenjujemo kompoziciju funkcija skaliranja, odnosno množimo pripadne matrice:

$$S = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}$$

Operacije skaliranja duž obiju osi ne moramo provoditi svaku posebno, već se možemo poslužiti matricom kompozicije skaliranja.

Zadan je trokut čiji su vrhovi u točkama $A(-2, 1)$, $B(-1, -3)$ i $C(3, 2)$. Sažmite dani trokut duž y-osi za faktor $k_y = 0.4$, te ga rastegnite duž x-osi za faktor $k_x = 1.2$.

Matrica skaliranja:

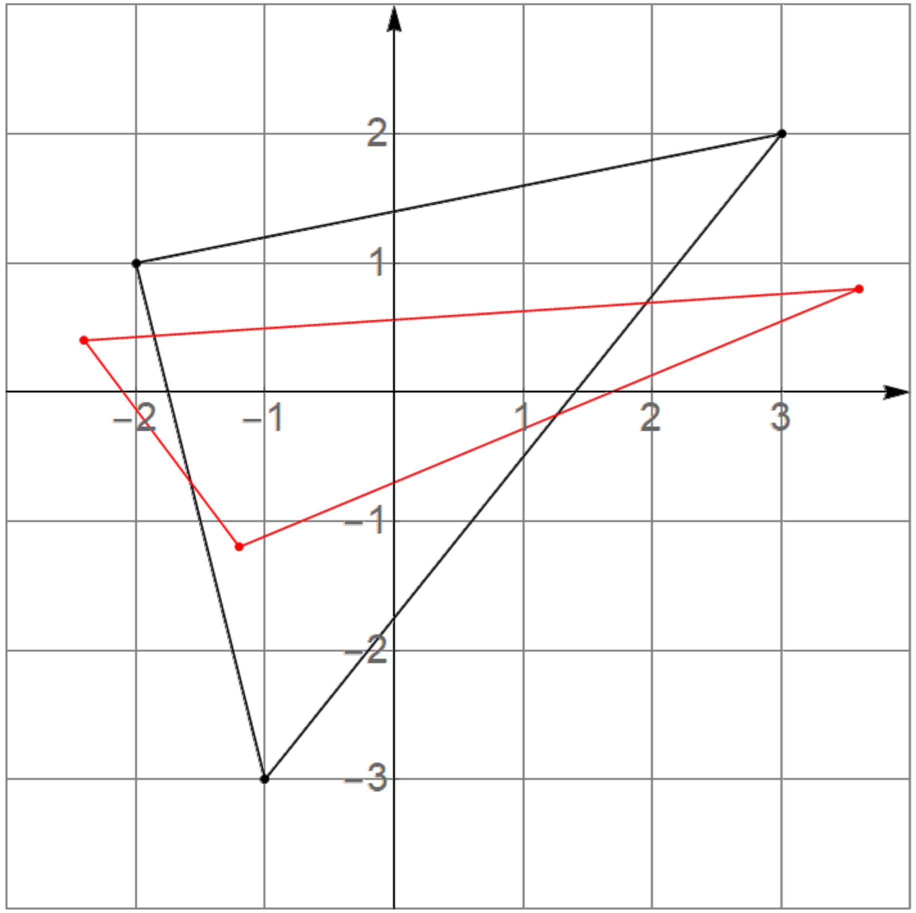
$$S = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Zadan je trokut čiji su vrhovi u točkama $A(-2,1)$, $B(-1,-3)$ i $C(3,2)$. Sažmite dani trokut duž y-osi za faktor $k_y = 0.4$, te ga rastegnite duž x-osi za faktor $k_x = 1.2$.



$$A' = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.4 \\ 0.4 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.2 \\ -1.2 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0 & 0.4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.6 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

Hvala ☺