1.1. Osnovna pravila prebrojavanja

Primjer 1.1.

Grad A i grad B povezuju tri ceste, a grad B i grad C četiri ceste. Na koliko različitih načina možemo doći iz grada A u grad C, preko grada B?

Broj elemenata Kartezijeva umnoška

Ako skup S_1 ima s_1 elemenata, a skup S_2 s_2 elemenata, onda Kartezijev umnožak $S_1 \times S_2$ ima $s_1 s_2$ elemenata. Pišemo $|S_1 \times S_2| = |S_1| \cdot |S_2|$.

Kartezijev umnožak više skupova

Broj elemenata u Kartezijevu umnošku k skupova je
$|S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_k| = |S_1| \cdot |S_2| \cdots |S_k|$.

Primjer 1.2.

Snježana u svom garderobnom ormaru ima 127 pari cipela, 135 haljina i 75 šešira. Na koliko se različitih načina Snježana može odjenuti?

Primjer 1.3.

Koliko postoji različitih tekućih računa u nekoj banci, ako su brojevi deseteroznamenkasti, a prva znamenka nije jednaka nuli?

Primjer 1.4.

Na nekoj visokoj školi studira 80 studenata prve godine, 70 studenata druge godine, 60 studenata treće godine i 50 studenata četvrte godine. Na koliko se načina može odabrati delegacija od četiri predstavnika svake godine? Na koliko načina se nakon toga može odabrati druga delegacija, sastavljena od četri predstavnika svake godine, u kojoj nije nitko iz prve delegacije? Na koliko se načina može odabrati delegacija od dva predstavnika s različitih godina?

Varijacije s ponavljanjem

Varijacija s ponavljanjem $k-$tog razreda u $n-$članom skupu S je svaka uređena $k-$torka Kartezijeva umnoška k skupova $S \times S \times \ldots \times S = S^k$. Broj varijacija s ponavljanjem označavamo $\overline{V}_n^k$, pa je $\overline{V}_n^k = |S \times S \times \ldots \times S| = |S|^k = n^k$.

Primjer 1.5.

U nekom gradu ima 40 semafora. Svaki semafor može svijetliti crveno, žuto ili zeleno. Na koliko načina mogu svi semafori svijetliti u određenom trenutku?

Primjer 1.6. (Broj podskupova zadanog skupa)

Koliki je broj podskupova skupa S koji ima n elemenata (uključujući prazan skup i cijeli skup)?

Partitivni skup

Skup svih podskupova skupa S označavamo s $\mathcal{P}(S)$ i nazivamo partitivnim skupom skupa S. Ako je $|S| = n$, onda je $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

Primjer 1.7.

Koliko ima šesteroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite?

Primjer 1.8.

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji su neparni i kojima su sve znamenke različite?

Pravilo uzastopnog prebrojavanja

Ako element s_1 možemo izabrati iz skupa S_1 na n_1 različitih načina, nakon toga (bez obzira na to koji smo element već izabrali) element s_2 iz skupa S_2 na n_2 načina, nakon toga element s_3 iz skupa S_3 na n_3 načina itd., onda je ukupan broj načina izbora niza $s_1, s_2, \ldots, s_k$ jednak

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdots n_k.$$

Primjer 1.9.

Na nekom šahovskom turniru svaki je igrač odigrao sa svakim od preostalih jednu partiju. Ukupno je odigrano 190 partija na turniru. Koliko je šahista sudjelovalo na turniru?

Primjer 1.10.

Na nekom međunarodnom kongresu sudjeluje 20 država i svaka država ima 15 predstavnika. Na koliko različitih načina možemo odabrati dva predstavnika iz iste države?

Varijacije bez ponavljanja

Uređena $k-$torka različitih elemenata istog skupa $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ naziva se varijacijom $k-$tog razreda u skupu od n elemenata. Pri tom mora biti $k \leq n$. Broj varijacija označavamo s V_n^k, pa je $V_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$.

Primjer 1.11.

U lift zgrade od 15 katova ušlo je 5 ljudi. Na koliko načina oni mogu izaći iz lifta tako da svaki čovjek izađe na različitom katu?

Primjer 1.12.

Na koliko načina možemo odabrati peteroznamenkasti broj sastavljen od znamenki $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ako:

(a) su mu sve znamenke različite,

(b) se na parnim dekadskim mjestima nalaze parne znamenke, a na neparnim dekadskim mjestima neparne znamenke,

(c) isto kao i (b), ali su sve znamenke u broju različite.

Primjer 1.13.

U nekoj studentskoj grupi ima 27 djevojaka i 23 mladića. Na koliko načina možemo odabrati jednog predstavnika te grupe?

Pravilo zbroja

Ako su A i B konačni disjunktni skupovi, onda za broj elemenata unije tih dvaju skupova vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B|$.

Broj elemenata unije dvaju skupova

Ako su A i B konačni skupovi, onda za broj elemenata unije tih dvaju skupova vrijedi $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Primjer 1.14.

U razredu od 30 učenika svaki učenik uči barem jedan od dvaju stranih jezika: engleski ili njemački. Ukupno 23 učenika uče engleski jezik, a njih 13 njemački jezik. Koliko učenika uči oba strana jezika?

Pravilo komplementa

Neka je U univerzalni skup te neka je $A \subseteq U$. Tada za broj elemenata komplementa skupa A vrijedi $|\overline{A}| = |U| - |A|$.

Primjer 1.15.

Koliko ima četveroznamenkastih brojeva koji imaju barem jednu znamenku 7?