3.3 Formula potpune vjerojatnosti

Primjer 3.14.

Prvi stroj daje 4% neispravnih proizvoda, a drugi 5% neispravnih proizvoda. Uzima se 70 proizvoda proizvedenih na prvom stroju i 30 proizvedenih na drugom stroju te sprema u skladište. Iz skladišta se slučajno bira jedan proizvod. Kolika je vjerojatnost da je proizvod ispravan?

$$\Omega = H_1 \cup H_2 \cup \ldots \cup H_n,$$

$H_i \cap H_j = \emptyset$, $i \neq j$, $P(H_i) > 0\ \forall\ i$. Ovakav rastav nazivamo **particija vjerojatnosnog prostora**. Kažemo još da familija $H_1, H_2, \ldots, H_n$ čini **potpun sustav događaja**.

Neka je $A \subset \Omega$ bilo koji događaj. Familijom $H_1, H_2, \ldots, H_n$ i on je razbijen na događaje:

$$A = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \ldots \cup (A \cap H_n).$$

Kako su događaji $A \cap H_i$ međusobno disjunktni, vrijedi:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \ldots + P(A \cap H_n) \\ &= P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + \ldots + P(H_n)P(A|H_n). \end{aligned}$$

Formula potpune vjerojatnosti

Neka je $\{H_1, H_2, \ldots, H_n\}$ potpun sustav događaja. Za svaki događaj $A \subset \Omega$ vrijedi $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)$.

$H_1, H_2, \ldots, H_n$ – **hipoteze**

Primjer 3.15.

Ivan u lijevom džepu ima dvije kovanice od 2 kune i četiri kovanice od 5 kuna, a u desnom džepu tri kovanice od 2 kune i četiri od 5 kuna. Ivan slučajno odabire jednu kovanicu iz lijevog džepa i prebacuje ju u desni džep. Kolika je vjerojatnost da nakon toga on iz desnog džepa izvuče kovanicu od 5 kuna?

Primjer 3.16.

Kako nije bio potpuno siguran u dijagnozu, liječnik je pacijentu pripisao tri različita lijeka koja mora redovito piti. Vjerojatnosti da pacijent pozitivno reagira na svaki od triju propisanih lijekova ne ovise jedna o drugoj i iznose 0.7. Ako pacijent pozitivno reagira na jedan lijek, vjerojatnost da će on ozdraviti iznosi 0.5, ako pozitivno reagira na dva lijeka, ozdravit će s vjerojatnošću 0.7, a ako pozitivno reagira na sva tri lijeka, ozdravit će s vjerojatnošću 0.9. Nađi vjerojatnost da pacijent ozdravi.

Bayesova formula

Ako su $H_1, H_2, \ldots, H_n$ hipoteze te A događaj, onda vrijedi:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(H_j)P(A|H_j)}.$$

Primjer 3.17.

Bacamo kocku. Neka su H_1 i H_2 hipoteze

$$\begin{aligned} H_1 &= \{\text{kocka pokazuje parni broj}\}, \\ H_2 &= \{\text{kocka pokazuje neparni broj}\}, \end{aligned}$$

te neka je A događaj

$$A = \{\text{kocka pokazuje broj manji od 4}\}.$$

Odredite vjerojatnosti aposteriornih hipoteza $P(H_1|A)$ i $P(H_2|A)$.

Primjer 3.18.

U vreći se nalazi 5 novčića među kojima je jedan lažni jer ima pismo s obje strane. Slučajno odabrani novčić baca se 3 puta i svaki se put pojavi pismo. Kolika je vjerojatnost da je odabran lažni novčić?

Primjer 3.19.

U prvoj posudi nalaze se 3 jestive i 3 otrovne gljive, a u drugoj 4 jestive i 2 otrovne. Iz prve posude na sreću odabiremo dvije gljive i prebacimo ih u drugu. Zatim iz druge posude izvlačimo jednu gljivu.

(a) Kolika je vjerojatnost da izvučena gljiva iz druge posude bude jestiva?

(b) Odredite vjerojatnost da su obje gljive prebačene iz prve posude bile jestive, ako je iz druge izvučena jestiva gljiva.

Primjer 3.20.

U jednoj od anketa, za ulazak u Europsku uniju izjasnilo se 41% građana, protiv se izjasnilo 37%, a 22% građana je bilo neodlučno. Od onih koji su za ulazak u EU, 62% je s visokim obrazovanjem, od onih koji su protiv je 40% s visokim obrazovanjem, a od neodlučnih je 15%. Novinar Večernjeg lista slučajnim odabirom upita jednog od anketiranih, visoko obrazovanog građanina je li se izjasnio za ulazak Hrvatske u EU, na što mu on nije htio odgovoriti. Kolika je vjerojatnost da se taj građanin izjasnio protiv?