## 5.2. Eksponencijalna razdioba

## Eksponencijalna razdioba, definicija

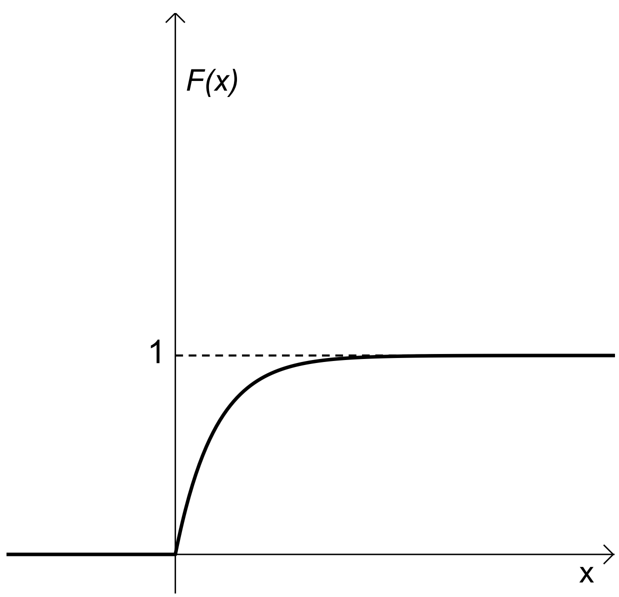
Kažemo da slučajna varijabla $X$ ima **eksponencijalnu razdiobu** s parametrom $\lambda > 0$ ako ona poprima pozitivne vrijednosti s gustoćom

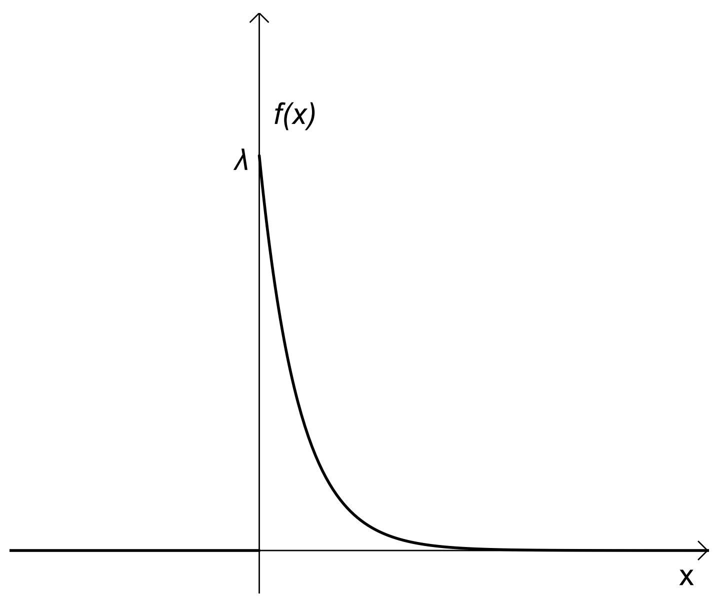
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Pišemo $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Njezina je funkcija razdiobe

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

# Funkcija razdiobe i gustoće



## Primjer 5.7.

Vrijeme $X$ ispravnog rada računala je slučajna varijabla s eksponencijalnom razdiobom. Vjerojatnost ispravnog rada računala tijekom jedne godine iznosi 0.9. Kolika je vjerojatnost da će od 15 računala u računarskom praktikumu njih barem 13 raditi ispravno tijekom 2 godine?

## Očekivanje i disperzija eksponencijalne razdiobe

Neka je $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Tada je

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

i

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

## Primjer 5.8.

Tvornički stroj se tijekom godine dana pokvario četiri puta. Kolika je vjerojatnost da će prvi mjesec sljedeće godine raditi ispravno?

## Primjer 5.9.

Vrijeme do prvog poziva u nekoj telefonskoj centrali je slučajna varijabla distribuirana po eksponencijalnom zakonu s očekivanjem 3 minute. Kolika je vjerojatnost da će se prvi poziv ostvariti tijekom

(a) prve minute,

(b) prve dvije minute,

(c) druge minute, ako je poznato da nije bilo poziva tijekom prve minute,

(d) treće i četvrte minute, ako je poznato da nije bilo poziva tijekom prve dvije minute?

## Karakterizacija eksponencijalne razdiobe – odsustvo pamćenja

**Teorem 5.2** *Neka za slučajnu varijablu $X$ koja uzima samo pozitivne vrijednosti za sve pozitivne $x$ i $t$ vrijedi*

$$P(X < x + t \,|X > t) = P(X < x).$$

*Tada $X$ ima eksponencijalnu razdiobu.*

## 5.3. Normalna razdioba

# Normalna razdioba, definicija

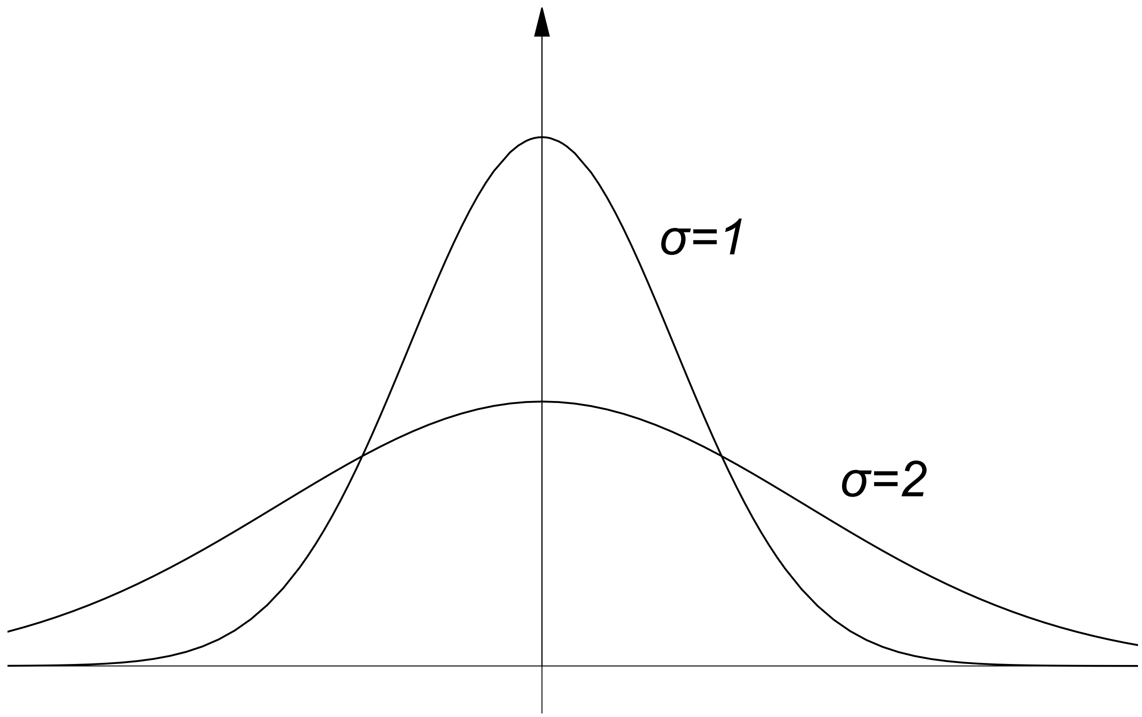
Slučajna varijabla $X$ ima **normalnu razdiobu** s parametrima $a \in \mathbf{R}$ i $\sigma^2 > 0$ ako je $X$ neprekinuta slučajna varijabla s gustoćom

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Pišemo $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$.

Graf – zvonolika krivulja tj. **Gaussova krivulja**.

SLIKA – graf gustoće za $a = 0$ te $\sigma = 1$ i $\sigma = 2$.



## Jedinična normalna razdioba

Za $a = 0$ i $\sigma = 1$, dobivamo $\mathcal{N}(0,1)$ tj. **jediničnu normalnu razdiobu**. Njezinu gustoću označavamo sa

$$\phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2}.$$

Za pripadnu funkciju razdiobe $\Phi$ vrijedi

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$$

Posljednji integral nije elementaran. Funkcija $\phi$ je parna, pa je

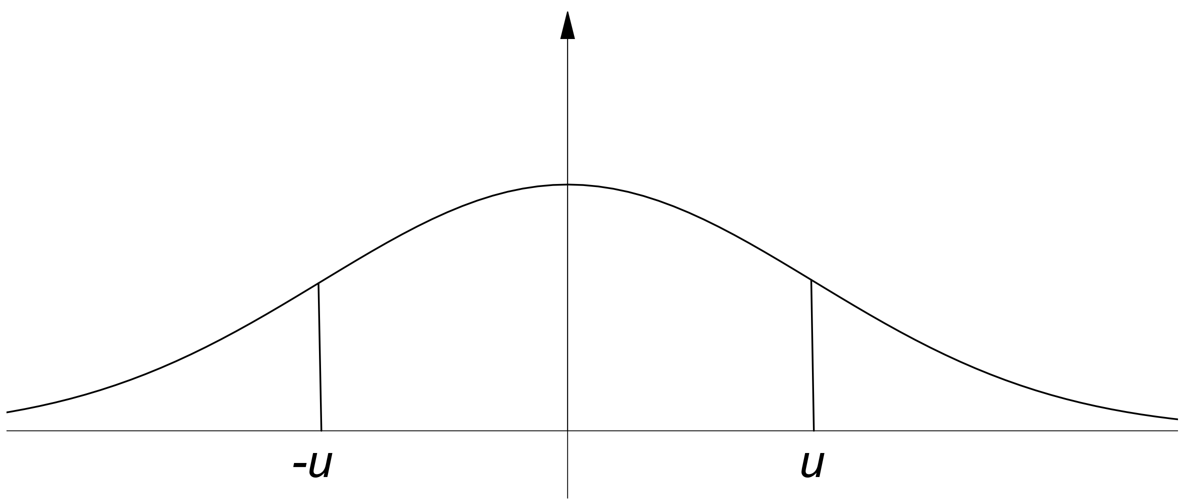
$$\int_{-\infty}^{0} \phi(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)dt = \frac{1}{2},$$

$$\int_{0}^{u} \phi(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-u}^{u} \phi(t)dt.$$

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^{u} \phi(t)dt = \int_{-\infty}^{0} \phi(t)dt + \int_{0}^{u} \phi(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_{-u}^{u} \phi(t)dt = \frac{1}{2}\left[1 + \Phi^*(u)\right],$$

gdje je $\Phi^*(u) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-u}^{u} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt.$

Vrijednost funkcije $\Phi^*$ jednaka površini ispod grafa funkcije nad odgovarajućim simetričnim intervalom.




Koristimo tabelirane vrijednosti funkcije $\Phi^*$. $\Phi^*$ je neparna, pa je dovoljno znati njezine vrijednosti za pozitivne vrijednosti od $u$.

## Veza jedinične i opće normalne razdiobe

Jedinična i opća normalna razdioba mogu se dobiti jedna iz druge linearnom transformacijom:

$$X \sim \mathcal{N}(0,1) \implies a + \sigma X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2),$$

$$X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2) \implies \frac{X-a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1).$$

## Očekivanje i disperzija: parametri normalne razdiobe

Ako je $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ onda je

$$E(X) = 0, \qquad D(X) = 1.$$

Ako je $X \sim \mathcal{N}(a,\sigma^2)$ onda je

$$E(X) = a, \qquad D(X) = \sigma^2.$$

# Računanje vjerojatnosti za jediničnu normalnu razdiobu

Za jediničnu normalnu razdiobu $X$ vrijedi

$$P(u_1 < X < u_2) = \Phi(u_2) - \Phi(u_1) = \frac{1}{2}\left[\Phi^*(u_2) - \Phi^*(u_1)\right].$$

U slučaju simetričnog intervala vrijedi

$$P(|X| < u) = \frac{1}{2}\left[\Phi^*(u) - \Phi^*(-u)\right] = \Phi^*(u).$$

## Primjer 5.10.

Neka je $X$ jedinična normalna varijabla. Odredite vjerojatnost događaja
(a) $0 < X < 2$ (b) $-2 < X < 1$ (c) $-2 < X < 2$
(d) $-2 < X < -1$ (e) $X < 2$ (f) $X > 2$

## Računanje vjerojatnosti za općenitu normalnu razdiobu

Ako je $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$, onda je $\frac{X-a}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1)$, pa vrijedi

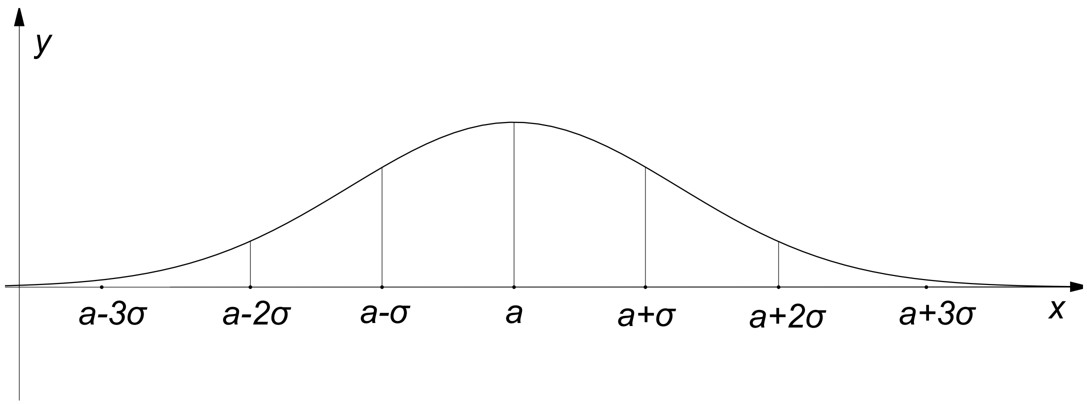
$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= P\left(\frac{x_1 - a}{\sigma} < \frac{X - a}{\sigma} < \frac{x_2 - a}{\sigma}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left[\Phi^*\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi^*\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right)\right]. \end{aligned}$$

## Primjer 5.11.

Neka je $X \sim \mathcal{N}(2,9)$. Izračunajte vjerojatnosti
(a) $P(-1 < X < 5)$ (b) $P(5 < X < 8)$ (c) $P(X < 3.5)$.

# Pravilo tri sigma

Neka je $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Računamo $P(|X - a| < k\sigma), \qquad k = 1, 2, 3.$




$$P(|X-a| < k\sigma) = P(-k\sigma < X-a < k\sigma) = P(-k < \widetilde{X} < k) = \Phi^*(k).$$

Vrijedi $\Phi^*(1) = 0.6827$, $\Phi^*(2) = 0.9545$, $\Phi^*(3) = 0.9973$. Dakle, s vjerojatnošću 99.73% (odnosno, praktički sigurno) normalna varijabla uzima vrijednosti unutar intervala $(a - 3\sigma, a + 3\sigma)$. Ta se činjenica zove **pravilo tri sigma**.

## Primjer 5.12.

Prosječan vijek trajanja automobilske gume, izražen u pređenim kilometrima, je normalna slučajna varijabla s očekivanjem 35000 km i odstupanjem 5000 km.

(a) Kolika je vjerojatnost da guma neće puknuti do pređenih 41000 km?

(b) Kolika je vjerojatnost da će guma puknuti između 32000 km i 39000 km?

## Primjer 5.13.

Vrijeme koje student provede na putu od kuće do fakulteta je slučajna varijabla približno distribuirana po normalnom zakonu s očekivanjem 50 minuta. Student kreće iz kuće u $07:20$ da bi stigao na predavanje koje počinje u $08:15$. Ako je vjerojatnost da će stići na fakultet u vremenskom intervalu od $08:05$ do $08:15$ jednaka $0.383$, kolika je vjerojatnost da će kasniti na predavanje više od 5 minuta?

# Stabilnost normalne razdiobe

**Teorem 5.3** *Neka su $X_1$ i $X_2$ nezavisne slučajne varijable s normalnim razdiobama $X_1 \sim \mathcal{N}(a_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(a_2, \sigma_2^2)$ i $\alpha_1$, $\alpha_2$ bilo koji realni brojevi. Tada vrijedi*

$$\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 \sim \mathcal{N}\left(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2, \alpha_1^2 \sigma_1^2 + \alpha_2^2 \sigma_2^2\right).$$

## Primjer 5.14

Međusobno nezavisne slučajne varijable $X, Y, Z$ podvrgavaju se normalnim razdiobama redom $X \sim \mathcal{N}(1,1)$, $Y \sim \mathcal{N}(2,2)$, $Z \sim \mathcal{N}(3,3)$. Izračunajte vjerojatnost događaja $\{X + 3Z > 2Y\}$.

## Primjer 5.15

Masa limuna podvrgava se normalnom zakonu s parametrima $a_1 = 15$ dkg i $\sigma_1 = 2$ dkg, a masa naranče normalnom zakonu s parametrima $a_2 = 25$ dkg i $\sigma_2 = 3$ dkg. U jednu vrećicu pakiraju se po tri limuna i tri naranče. Odredite vjerojatnost da se masa tako načinjenog paketa kreće između 115 dkg i 130 dkg. Zanemarite masu vrećice.

## Aproksimacija binomne razdiobe normalnom

Neka je $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ binomna slučajna varijabla. Razdioba ove varijable za velike brojeve $n$ nalikuje funkciji gustoće normalne varijable $Y \sim \mathcal{N}(np, npq)$. Za fiksni $n$ kvaliteta aproksimacije je bolja što je $p$ bliži $\frac{1}{2}$.

## Lokalni teorem Moivre-Laplacea

**Teorem 5.4.** *Vjerojatnosti realizacija binomne slučajne varijable $\mathcal{B}(n, p)$ mogu se aproksimirati pomoću funkcije gustoće normalne varijable $\mathcal{N}(pq, npq)$:*

$$P(X = m) \approx P(m - \frac{1}{2} < Y < m + \frac{1}{2}) \approx f(m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{(m-np)^2}{2npq}}.$$

## Primjer 5.16.

Tvornica žarulja isporučuje veliku seriju žarulja. Vjerojatnost da slučajno odabrana žarulja iz velike serije bude neispravna iznosi 0.01. Kolika je vjerojatnost da će među 2000 slučajno odabranih žarulja njih 20 biti neispravno?

# Centralni granični teorem – Teorem Moivre-Laplacea

**Teorem 5.5.** *Neka je* $X \sim \mathcal{B}(n,p)$*. Za veliki* $n$ *razdioba slučajne varijable* $\dfrac{X-np}{\sqrt{npq}}$ *može se aproksimirati jediničnom normalnom razdiobom*

$$P\left(x_1 < \frac{\mathcal{B}(n,p)-np}{\sqrt{npq}} < x_2\right) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}u^2} du.$$

*Pišemo* $\mathcal{B}(n,p) \approx \mathcal{N}(np, npq)$*, za dovoljno veliki* $n$*.*

## Primjer 5.17

Izračunajte vjerojatnost da se u 18000 bacanja ispravne kocke broj šestica nalazi između 2975 i 3050.

## Primjer 5.18.

Slučajno odabiremo 1000 točaka unutar kvadrata. Kolika je vjerojatnost da će više od 800 točaka biti unutar kruga upisanog tom kvadratu?

## Primjer 5.19.

(korekcija granica u slučaju malog $n$)

Simetrični novčić bacamo 80 puta. Neka slučajna varijabla $X$ bilježi broj pisama. Izračunajte vjerojatnost događaja $\{35 \leq X \leq 50\}$.