Jednolika razdioba

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \cdots & \frac{1}{n} \end{pmatrix}.$$

Primjer 4.12.

U kutiji se nalazi 10 kuglica od kojih je samo jedna bijela.
Izvlačimo na sreću jednu po jednu kuglicu iz kutije, bez vraćanja.
Neka X označava pokušaj u kojem je izvučena bijela kuglica.
Odredite razdiobu i očekivanje od X.

Hipergeometrijska razdioba

Neka su m i n prirodni brojevi takvi da je $n \leq m$ te neka je $r \in \{0, 1, 2, \ldots, m\}$. Kažemo da slučajna varijabla X ima **hipergeometrijsku razdiobu** ako ona poprima vrijednosti u skupu $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ s vjerojatnostima

$$P(X = k) = \frac{\binom{r}{k}\binom{m-r}{n-k}}{\binom{m}{n}}, \quad k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}.$$

Primjer 4.13.

U kutiji se nalazi m proizvoda od kojih je r oštećenih. Slučajno odabiremo n proizvoda te neka slučajna varijabla X bilježi broj oštećenih proizvoda među odabranima. Pokažite da X ima hipergeometrijsku razdiobu.

Geometrijska razdioba

Neka je $p = P(A)$. Ponavljamo pokus u nepromijenjenim uvjetima *do prve realizacije* događaja A. Neka slučajna varijabla X mjeri broj pokusa *u kojem se realizirao* događaj A. Onda kažemo da X ima **geometrijsku razdiobu** s parametrom p i pišemo $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Zakon razdiobe:

$$p_k = P(X = k) = p(1-p)^{k-1}, \qquad k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$$

jer se u prvih $k-1$ pokusa događaj A nije realizirao, a pojavio se u $k-$tom pokusu. Stavimo $q := 1 - p$. Primijetimo da vrijedi

$$P(X > k) = (1-p)^k = q^k,$$

jer se tada događaj A nije ostvario u prvih k pokusa.

Primjer 4.14.

Odredite razdiobu slučajne varijable $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Očekivanje i disperzija geometrijske razdiobe

Ako je $X \sim \mathcal{G}(p)$, onda je

$$E(X) = \frac{1}{p}.$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Primjer 4.15.

Kolika je vjerojatnost da će se šestica pojaviti u prva tri bacanja kocke?

Odsustvo pamćenja – temeljno svojstvo geometrijske razdiobe

Teorem 4.3 *Slučajna varijabla* X *koja poprima vrijednosti u skupu* $\{1, 2, 3, \ldots\}$ *ima geometrijsku razdiobu onda i samo onda ako za sve* $k, m \geq 1$ *vrijedi:*

$$P(X = k + m | X > k) = P(X = m).$$

Primjer 4.16. (pokus s dva nezavisna obilježja)

Slučajni pokus sastoji se od istovremenog bacanja simetričnog novčića i kocke. Pokus ponavljamo sve dok se ne pojavi pismo ili šestica. Slučajna varijabla bilježi redni broj pokusa u kojem se ostvario taj događaj. Dokažite da slučajna varijabla X ima geometrijsku razdiobu, te joj odredite parametar.

Binomna razdioba

Neka je p vjerojatnost realizacije događaja A pri izvođenju nekog pokusa. Pretpostavimo da isti pokus ponavljamo n puta. Neka slučajna varijabla X mjeri broj pojavljivanja događaja A. Tada X ima binomnu razdiobu s parametrima n i p, tj. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$X \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$, odredimo $p_k = P(X = k)$. Ako se realizirao događaj $\{X = k\}$, to znači da se u n pokusa A ostvario točno k puta, a $n - k$ puta se nije ostvario. Broj različitih mogućnosti za odabir pokusa u kojima se A ostvario je $\binom{n}{k}$. Zato je

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}.$$

$q := 1 - p$.

Binomna razdioba – definicija

Kažemo da slučajna varijabla X ima binomnu razdiobu s parametrima n i p i pišemo $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, ako X poprima vrijednosti unutar skupa $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ s vjerojatnostima

$$p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Primjer 4.17.

Simetrični novčić bacamo 9 puta. Označimo s A i B događaje

$$
\begin{aligned}
A &= \{\text{pismo se pojavilo 4 puta}\} \\
B &= \{\text{pismo se pojavilo 5 puta}\}.
\end{aligned}
$$

Da li je vjerojatniji događaj A, događaj B ili su događaji jednako vjerojatni?

Primjer 4.18

Pokus se sastoji u bacanju triju kocki. Izračunajte vjerojatnost da se u 6 nezavisnih pokusa 3 puta pojavi točno 1 šestica.

Stabilnost binomne razdiobe

Ako su $X_1 \sim \mathcal{B}(n_1, p)$ i $X_2 \sim \mathcal{B}(n_2, p)$ nezavisne binomne slučajne varijable, onda je $X_1 + X_2 \sim \mathcal{B}(n_1 + n_2, p)$.

Bernoullijeva slučajna varijabla

Bernoullijeva ili **indikatorska** slučajna varijabla je slučajna varijabla koja poprima samo dvije vrijednosti: 1 s vjerojatnošću p i 0 s vjerojatnošću $q = 1 - p$. Ona bilježi realizaciju događaja A u jednom pokusu.

Ako su $X_1, X_2, \ldots, X_n$ Bernoullijeve nezavisne varijable s istim parametrom p, tada je njihov zbroj (zbog svojstva stabilnosti) $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ binomna slučajna varijabla $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Na temelju toga možemo lagano odrediti očekivanje i disperziju binomne slučajne varijable.

Očekivanje i disperzija binomne varijable

Očekivanje i disperzija binomne slučajne varijable $\mathcal{B}(n, p)$ dani su sljedećim formulama:
$E(X) = np, \qquad D(X) = npq$

Primjer 4.19.

U kvadrat je upisan krug. Izračunaj vjerojatnost da će se od 6 na sreću odabranih točaka unutar kvadrata barem dvije naći unutar kružnice.

Poissonova razdioba

Aproksimacija binomne razdiobe

Teorem 4.4 *Neka je n velik, a p malen. Označimo $\lambda = np$. Tada vrijedi sljedeća aproksimacija:*

$$\binom{n}{k} p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Poissonova razdioba – definicija i numeričke karakteristike

Kažemo da slučajna varijabla X ima Poissonovu razdiobu s parametrom $\lambda > 0$ i pišemo $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ ako ona poprima vrijednosti unutar skupa $\{0, 1, 2, \ldots\}$ s vjerojatnostima

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Za očekivanje i disperziju ove razdiobe vrijedi $E(X) = D(X) = \lambda$.

Primjer 4.20.

U poznati shopping centar tijekom jednog sata ušlo je 360 ljudi.
Odredite vjerojatnost

(a) da tijekom jedne minute nitko nije ušao u shopping centar,

(b) da je barem troje ljudi ušlo u shopping centar.

Stabilnost Poissonove razdiobe

Ako su $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$ i $X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$ nezavisne Poissonove slučajne varijable, onda je $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

Primjer 4.21.

Tvornica žarulja isporučuje veliku količinu žarulja, među kojima je 0.8% škarta. Žarulje se pakiraju u kutije od po 100 komada. Koliki će postotak kutija biti bez ijednog škarta, a koliki s dva ili više škartova?

Primjer 4.22.

Neki tvornički stroj sastoji se od 2000 dijelova. Vjerojatnost kvara svakog pojedinog dijela u toku radnog tjedna iznosi 0.001. Ukoliko se pojedini dio pokvari, vjerojatnost da stroj prestane s radom iznosi 0.03. Odredite vjerojatnost da stroj prestane raditi u toku radnog tjedna.